

# Podstawy fizyki

D. M. Bourg: „Fizyka dla programistów gier”

<http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/>

R. Resnick, D. Halliday: „Fizyka dla studentów nauk przyrodniczych i technicznych”



TERMODYNAMIKA	
ciśnienie	$p = \frac{F}{S}$
gęstość	$\rho = \frac{m}{V}$
ciepło	$Q = mc_w \Delta T$
ciepło w przemianach fazowych	$Q = mL$ $Q = mR$
równanie stanu gazu	$\frac{pV}{T} = const$
równanie Clapeyrona	$pV = nRT$
ciepło molowe	$C_p = C_v + R$
I zasada termodynamiki	$\Delta U = Q + W$
praca ( $p = const$ )	$W = -p \Delta V$
sprawność	$\eta = \frac{W_{uz.}}{Q_{wt.}}$ ; $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$
sprawność silnika Carnota	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

ATOM WODORU	
energia atomu wodoru (model Bohra)	$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

OPTYKA	
równanie soczewki – zwierciadła	$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
soczewka	$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_{socz.}}{n_{otocz.}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$
zwierciadło	$f = \frac{R}{2}$
zdolność skupiająca	$Z = \frac{1}{f}$
kąt graniczny	$\sin \alpha_{gr} = \frac{1}{n}$
kąt Brewstera	$\text{tg } \alpha_B = n$

FIZYKA WSPÓŁCZESNA	
równoważność masy-energii	$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
pęd relatywistyczny	$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
dylatacja czasu	$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
energia fotonu	$E = h\nu$
pęd fotonu	$p = \frac{h}{\lambda}$
fala de Broglie'a	$\lambda = \frac{h}{p}$
zasada nieoznaczoności	$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$
efekt fotoelektryczny	$h\nu = W + \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{\max}$
rozpad promieniotwórczy	$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$

HYDROSTATYKA	
siła parcia	$F = pS$
ciśnienie hydrostatyczne	$p = \rho gh$
siła wyporu	$F_{wyp} = \rho gV$

ASTRONOMIA	
III prawo Keplera	$\frac{T^2}{R_{sr}^3} = const$

### PRZEDROSTKI

Mnożnik	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
Przedrostek	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
Oznaczenie	G	M	k	h	da	d	c	m	$\mu$	n	p

STALE FIZYCZNE	
Przyspieszenie ziemskie	$g \approx 9,81 \frac{m}{s^2} \approx 10 \frac{m}{s^2}$
Masa Ziemi	$M_Z \approx 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Średni promień Ziemi	$R_Z \approx 6370 \text{ km}$
Stała grawitacji	$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$
Liczba Avogadro	$N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$
Objętość 1 mola gazu w warunkach normalnych	$V \approx 22,41 \frac{dm^3}{mol}$
Stała gazowa	$R \approx 8,31 \frac{J}{mol \cdot K}$
Stała Boltzmanna	$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
Przenikalność elektryczna próżni (stała elektryczna)	$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$ $\left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k \approx 8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right)$
Przenikalność magnetyczna próżni (stała magnetyczna)	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
Prędkość światła w próżni	$c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
Stała Plancka	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Ładunek elektronu	$e \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa spoczynkowa elektronu	$m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa protonu	$m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa neutronu	$m_n \approx 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Jednostka masy atomowej	$u \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

**RUCH PROSTOLINIOWY**

prędkość	$v(t) = v_0 + at$
droga	$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ; $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$
pęd	$\vec{p} = m \vec{v}$
siła tarcia	$F_T = \mu F_N$
praca	$W = F s \cos \angle(\vec{F}, \vec{s})$
energia kinetyczna	$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$
moc	$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

**RUCH PO OKRĘGU**

częstotliwość	$f = \frac{1}{T}$
prędkość kątowna	$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
przyspieszenie dośrodkowe	$a_d = \frac{v^2}{r}$
siła dośrodkowa	$F_d = \frac{mv^2}{r}$

**RUCH OBROTOWY**

prędkość kątowna	$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$
kąt	$\alpha(t) = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
moment siły	$M = F r \sin \angle(\vec{F}, \vec{r})$
moment bezwładności	$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$
moment pędu	$J = I \omega$
przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{M}{I}$
energia	$E_{kin} = \frac{I \omega^2}{2}$

**RUCH DRGAJĄCY**

wychylenie	$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$
prędkość	$v_x(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$
przyspieszenie	$a_x(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$
siła	$F_x(t) = -m A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$
wahadło matematyczne	$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
masa na sprężynie	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

**GRAWITACJA**

siła	$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
natężenie pola	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$
energia	$E_{pot} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ $E_{pot} = m g h$ (dla $h \ll R_z$ )
prędkości kosmiczne (dla Ziemi)	$v_I = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}} \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}} \approx 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

**FALE**

długość	$\lambda = v T = \frac{v}{f}$
załamanie fali	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$
siatka dyfrakcyjna	$n \lambda = d \sin \alpha$
poziom natężenia dźwięku	$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
efekt Dopplera	$f = f_{zr} \frac{v \pm u_{ob}}{v \mp u_{zr}}$

**SPRĘŻYSTOŚĆ**

siła sprężystości	$F_x = -k x$
energia	$E_{pot} = \frac{k x^2}{2}$

**ELEKTROSTATYKA**

prawo Coulomba	$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ ; $k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$
natężenie pola	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ; $E = \frac{U}{d}$
energia	$E_{pot} = k \frac{q_1 q_2}{r}$
potencjał elektrostatyczny	$V = \frac{E_{pot}}{q}$
pojemność	$C = \frac{Q}{U}$
kondensator płaski	$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$
energia kondensatora	$W = \frac{CU^2}{2}$
łączenie kondensatorów	szeregowe $\frac{1}{C_z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ równoległe $C_z = \sum_{i=1}^n C_i$

**PRĄD STAŁY**

natężenie prądu stałego	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
prawo Ohma	$U = R I$
łączenie oporów	szeregowe $R_z = \sum_{i=1}^n R_i$ równoległe $\frac{1}{R_z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$
opór	$R = \rho \frac{l}{S}$
prawo Ohma dla obwodu	$I = \frac{\mathcal{E}}{R_z + R_w}$
moc	$P = I U$

**POLE MAGNETYCZNE**

siła Lorentza	$F = q v B \sin \angle(\vec{v}, \vec{B})$
siła elektrodynamiczna	$F = B I l \sin \angle(\vec{l}, \vec{B})$
strumień pola	$\Phi = B S \cos \angle(\vec{B}, \vec{S})$
przewód prostoliniowy	$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$
pojedynczy zwoj	$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2r}$
zwojnica	$B = \mu_0 \mu_r n \frac{I}{l}$
siła wzajemnego oddziaływania pomiędzy przewodami	$F = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l}{2\pi r}$
SEM indukcji	$\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$
SEM samoindukcji	$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$
indukcyjność zwojownicy	$L = \mu_0 \mu_r n^2 \frac{S}{l}$

**PRĄD PRZEMIENNY**

SEM – prądnica	$\mathcal{E} = n B S \omega \sin \omega t$
napięcie skuteczne	$U_{sk} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
natężenie skuteczne	$I_{sk} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$
transformator	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{I_2}{I_1}$
opór indukcyjny	$R_L = \omega L = 2\pi f L$
opór pojemnościowy	$R_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$
częstotliwość rezonansowa obwodu LC	$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$
zawada	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

<b>Wielkość fizyczna</b>	<b>Symbol</b>	<b>Jednostki SI</b>	<b>Jednostki brytyjskie</b>
Długość	$l$	m, metr	ft, feet
Masa	$m$	g, gram	slug
Czas	$t$	s, sekunda	s, seconds
Prędkość liniowa	$v$	m/s	ft/s
Prędkość kątowna	$\omega$	radian/s	radian/s
Przyspieszenie liniowe	$a$	m/s <sup>2</sup>	ft/s <sup>2</sup>
Przyspieszenie kątowne	$\alpha$	radian/s <sup>2</sup>	radian/s <sup>2</sup>
Siła	$F$	N, niuton	lb, pound
Moment siły	$M$	N*m	ft*lb
Moment bezwładności	$I$	kg*m <sup>2</sup>	lb*ft*s <sup>2</sup>
Ciśnienie	$p$	N/m <sup>2</sup>	lb/ft <sup>2</sup>
Gęstość	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	slug/ft <sup>3</sup>

**Mila morska** – jest jednostką odległości stosowaną w nawigacji morskiej oraz lotnictwie. Jest to długość łuku południka ziemskiego odpowiadająca jednej minucie kątowej koła wielkiego. W rzeczywistości ze względu na kształt kuli ziemskiej (Geoida) długość łuku 1 minuty kątowej jest różna w zależności od szerokości geograficznej.

Wielka Brytania – 1853,18 m

Dania – 1851,85 m

Holandia – 1851,85 m

Stany Zjednoczone – 1853,248 m

Portugalia – 1850,00 m

Japonia – 1853,18 m

**Metr** – jednostka podstawowa długości w układach: SI, MKS, MKSA, MTS, oznaczenie m. W myśl definicji zatwierdzonej przez XVII Generalną Konferencję Miar w 1983 jest to odległość, jaką pokonuje światło w próżni w czasie  $1/299\,792\,458$  s.

$$1\text{Mm} = 1853,18\text{m}$$

$$1\text{m} = 1\text{Mm} / 1853,18\text{m} \\ = 0,0005396$$

## Przelicznik jednostek długości

Po wprowadzeniu danej jednostki narzędzie, kalkulator automatycznie przelicza wartość dla wszystkich jednostek z danej kategorii. Kalkulator oblicza dokładną wartość jednostki, z uwzględnieniem 15 istotnych znaków. Dla wartości z zakresu poniżej  $10^{(-15)}$  i powyżej  $10^{(15)}$  zastosowano zapis matematyczny, np:  $1.34e+16$  co oznacza  $1,34 \cdot 10^{(-16)}$  co jest równe  $0,000000000000000134$ .

Konwerter oblicza jednostki automatycznie. Po wprowadzenia wartości danej jednostki (obojętnie której) przelicza wartość pozostałych jednostek z danej kategorii. Aby wyczyścić („zzerować”) narzędzie wystarczy wprowadzić dla danej (obojętnie której) jednostki wartość 0.

a	<input type="text" value="10000000000"/>	Angstrom	<b>Długość</b>
mm	<input type="text" value="1000"/>	Milimetr	<a href="#">Powierzchnia</a>
cm	<input type="text" value="100"/>	Centymetr	<a href="#">Objętość</a>
in	<input type="text" value="39.370078740157"/>	Cal	<a href="#">Masa</a>
ft	<input type="text" value="3.2808398950131"/>	Stopa	<a href="#">Prędkość</a>
yd	<input type="text" value="1.0936132983377"/>	Jard	<a href="#">Czas</a>
m	<input type="text" value=""/>	Metr	<a href="#">Energia</a>
km	<input type="text" value="0.001"/>	Kilometr	<a href="#">Nateżenie Światła</a>
mi	<input type="text" value="0.00062137119223733"/>	Mila	<a href="#">Temperatura</a>
nmi	<input type="text" value="0.00053995680345572"/>	Mila morska	<a href="#">Ciśnienie</a>
AU	<input type="text" value="6.6845871222684e-12"/>	Jednostka astronomiczna	<a href="#">Siła</a>
ly	<input type="text" value="1.0570234070091e-16"/>	Rok świetlny	<a href="#">Moc</a>
			<a href="#">Ilość</a>
			<a href="#">Pamięć</a>

Wielokrotności			Podwielokrotności		
Mnożnik	Nazwa	Symbol	Mnożnik	Nazwa	Symbol
$10^1$	deka	da	$10^{-1}$	decy	d
$10^2$	hekto	h	$10^{-2}$	centy	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	mili	m
$10^6$	mega	M	$10^{-6}$	mikro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	tera	T	$10^{-12}$	piko	p
$10^{15}$	peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	eksa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

**Wektor:**

$$\mathbf{v} = [x_k - x_p, y_k - y_p, z_k - z_p]$$

**Długość:**

$$|\mathbf{v}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

**Kąty kierunkowe:**

$$v_x = |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi_x \quad v_y = |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi_y \quad v_z = |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi_z$$

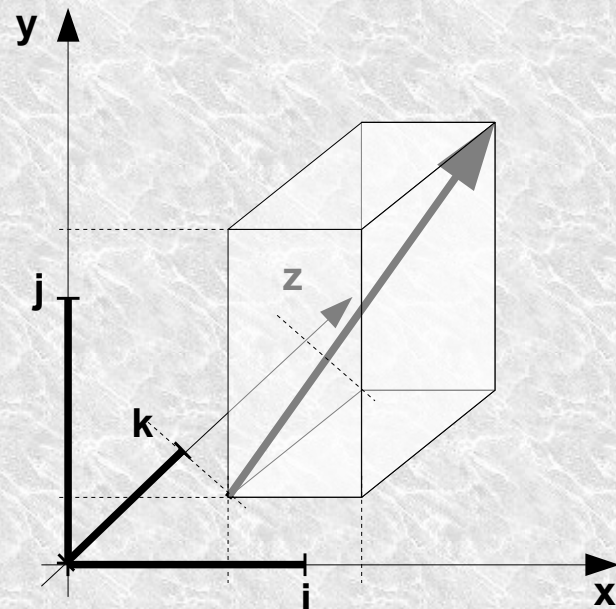
$$\cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y + \cos^2 \varphi_z = 1$$

**Wektory jednostkowe:**

$$\mathbf{v} = [x, y, z] = (v_x)\mathbf{i} + (v_y)\mathbf{j} + (v_z)\mathbf{k}$$

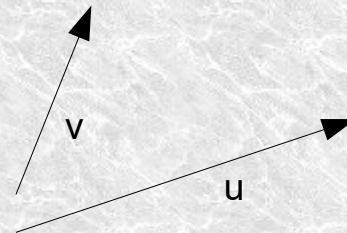
**Normalizacja:**

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = (x/|\mathbf{v}|)\mathbf{i} + (y/|\mathbf{v}|)\mathbf{j} + (z/|\mathbf{v}|)\mathbf{k}$$



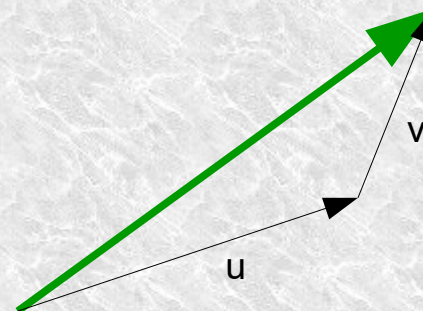


## Działania na wektorach



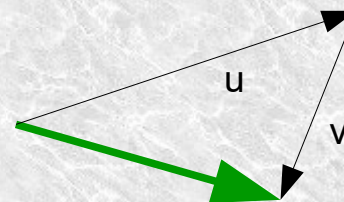
Dodawanie wektorów:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x)\mathbf{i} + (u_y + v_y)\mathbf{j} + (u_z + v_z)\mathbf{k}$$



Odejmowanie wektorów:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_x - v_x)\mathbf{i} + (u_y - v_y)\mathbf{j} + (u_z - v_z)\mathbf{k}$$



Iloczyn wektorowy:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\mathbf{i} + (-u_x v_z + u_z v_x)\mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\mathbf{k}$$

Iloczyn skalarny:

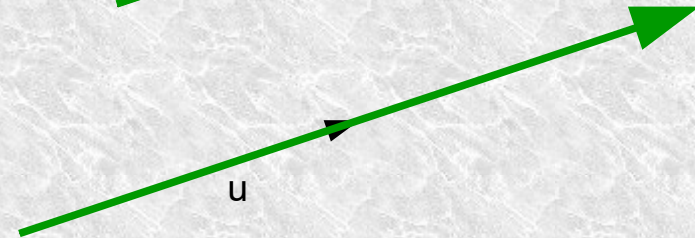
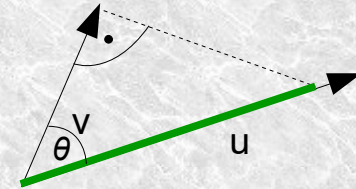
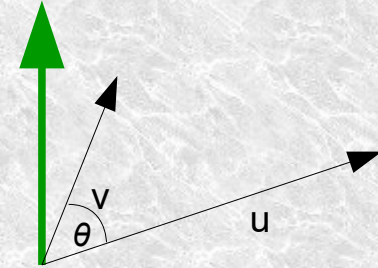
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x \cdot v_x) + (u_y \cdot v_y) + (u_z \cdot v_z) = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta$$

Mnożenie przez skalar:

$$\mathbf{v} \cdot s = [x \cdot s, y \cdot s, z \cdot s]$$

Dzielenie przez skalar:

$$\mathbf{v} / s = [x / s, y / s, z / s]$$



## **Punkt materialny**

– ciało, które ma masę, ale nie ma rozmiarów.

## **Ciało sztywne**

– układ punktów materialnych,  
których wzajemne odległości nie zmieniają się.

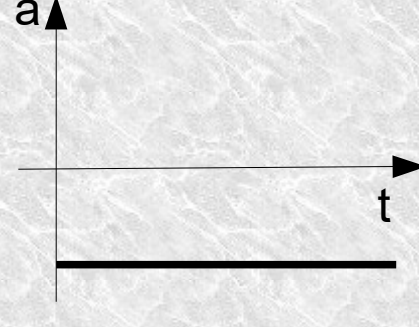
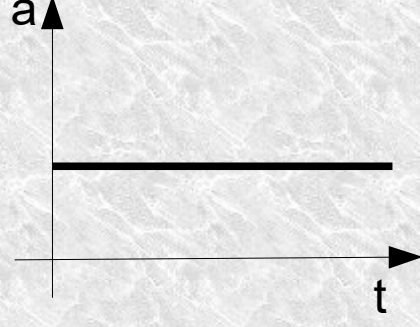
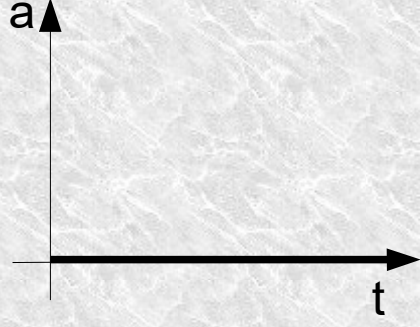
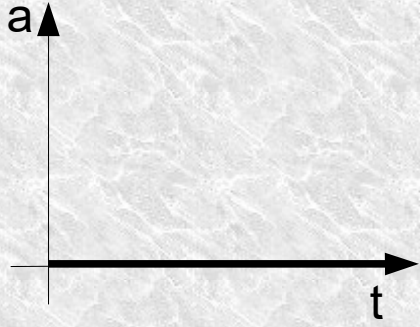
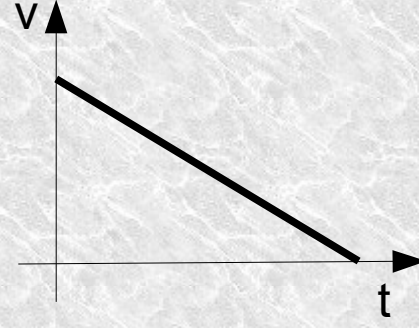
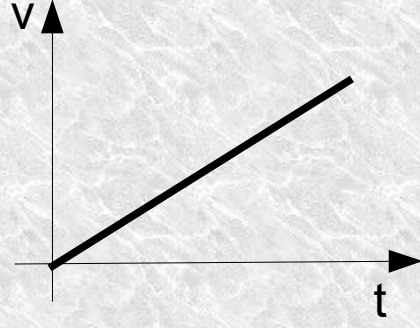
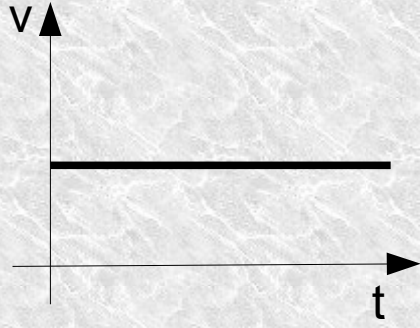
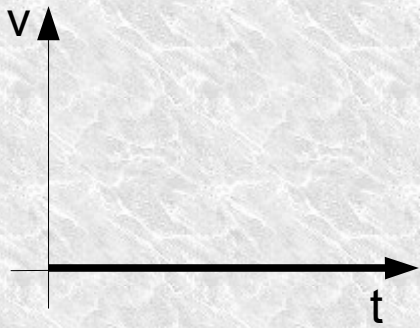
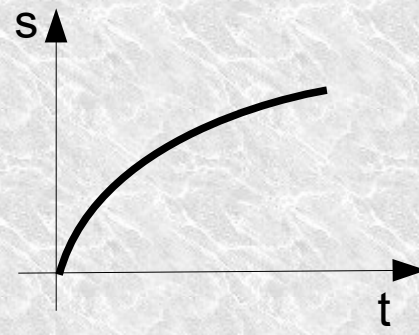
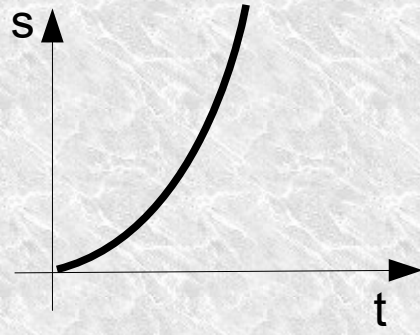
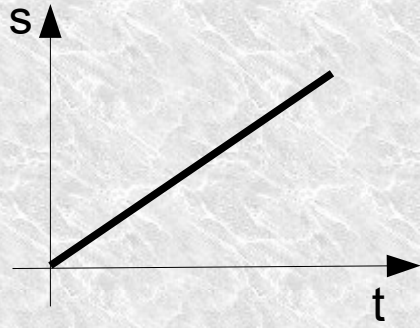
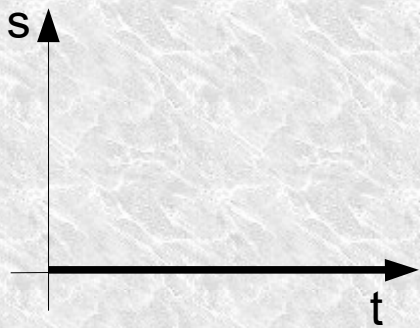
## Prawa dynamiki Newtona

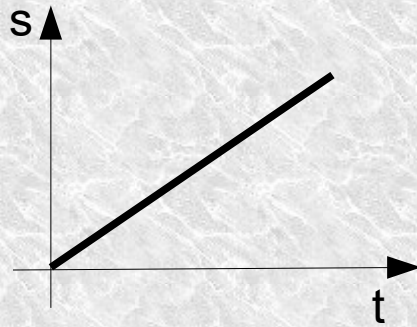
Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub wypadkowa sił jest równa zero, to ciało trwa w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Jeżeli na ciało działa stała, niezrównoważona siła to ciało porusza się ruchem jednostajnie zmiennym. Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.

$$a=F/m$$

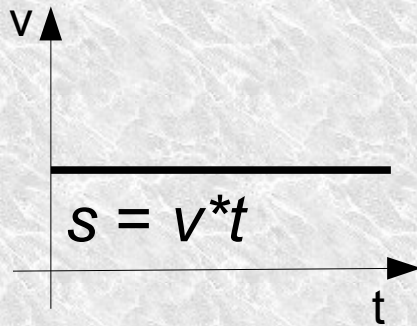
Względem każdego działania istnieje przeciwdziałanie, skierowane przeciwnie i równe, tj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie.





**droga:**

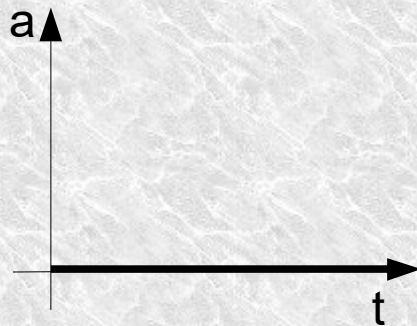
$$s = v \cdot t$$



**prędkość:**

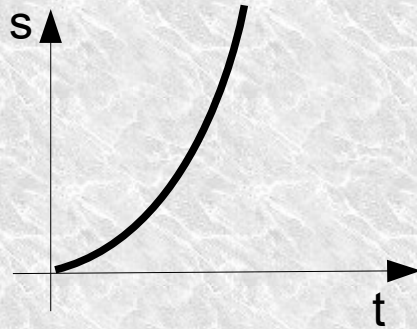
$$v = s/t \text{ [km/h] [m/s]}$$

$$v = \text{const}$$



**przyspieszenie:**

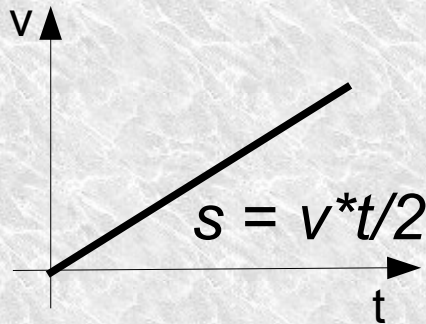
$$a = 0$$



**droga:**

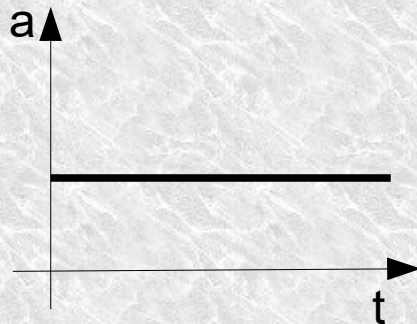
$$s = a \cdot t^2 / 2$$

$$s = v \cdot t / 2$$



**prędkość:**

$$v = v_1 + a \cdot t$$



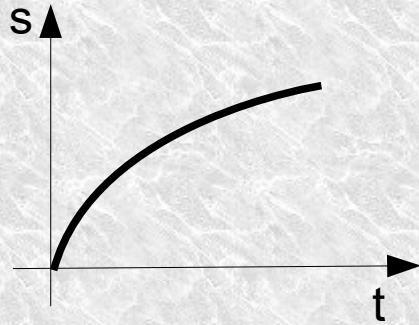
**przyspieszenie:**

$$a = \Delta v / \Delta t \quad [\text{m/s}^2]$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

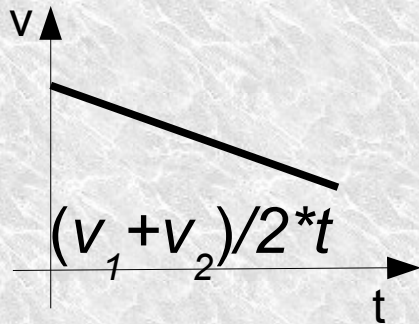
$$a > 0$$

$$a = \text{const}$$



**droga:**

$$s = v_1 * t - a * t^2 / 2$$



**prędkość:**

$$v = v_1 - a * t$$



**opóźnienie (przyspieszenie ujemne):**

$$a = \Delta v / \Delta t \quad [\text{m/s}^2]$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

$$a < 0$$

$$a = \text{const}$$



**prędkość:**

$$v = \Delta s / \Delta t$$

**przyspieszenie:**

$$a = \Delta v / \Delta t$$

**prędkość chwilowa:**

$$v_2 = v_1 + at$$

**równania kinematyczne:**

$$v_2 = v_1 + at$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(s_2 - s_1)$$

$$s_2 = s_1 + v_1 t + (at^2)/2$$

$$\mathbf{s} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

**prędkość:**

$$v = \Delta s / \Delta t$$

**przyspieszenie:**

$$a = \Delta v / \Delta t$$

**prędkość chwilowa:**

$$v_2 = v_1 + at$$

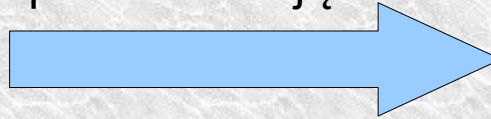
**równania kinematyczne:**

$$v_2 = v_1 + at$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(s_2 - s_1)$$

$$s_2 = s_1 + v_1 t + (at^2)/2$$

przekształcając



**szukamy a**

mamy  $\Delta t, v_1, v_2$

$$a = (v_2 - v_1) / \Delta t$$

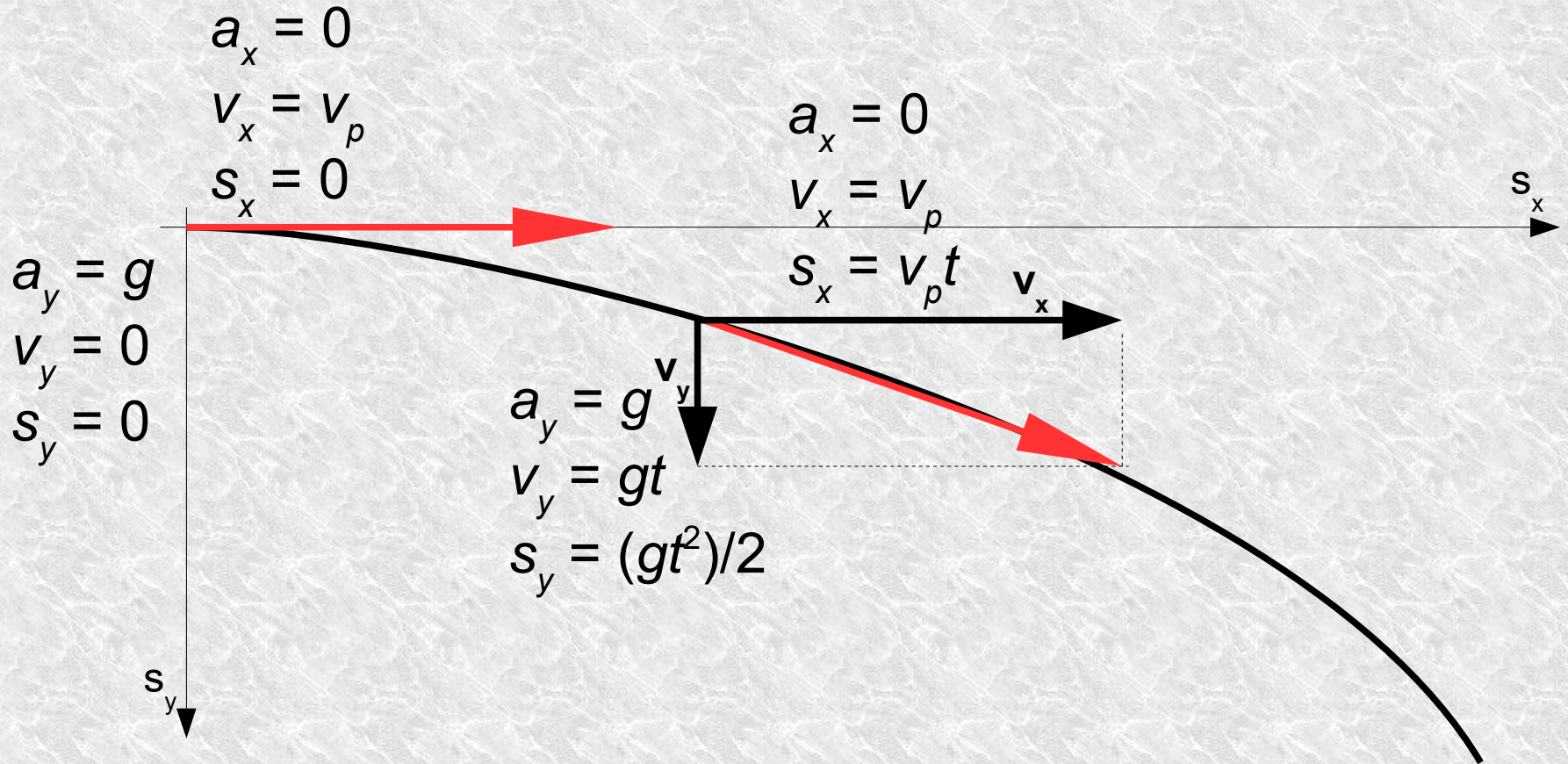
mamy  $\Delta t, v_1, \Delta s$

$$\begin{aligned} a &= (v_2 - v_1) / \Delta t = \\ &= ((\Delta s / \Delta t - v_1) - v_1) / \Delta t = \\ &= (\Delta s / \Delta t - 2v_1) / \Delta t = \\ &= (\Delta s - 2v_1 \Delta t) / \Delta t^2 \end{aligned}$$

mamy  $v_1, v_2, \Delta s$

$$a = (v_2^2 - v_1^2) / (2\Delta s)$$

# Strzał z broni



## **Strzał z broni:**

$$\mathbf{s} = (v_p t)\mathbf{i} + ((1/2)gt^2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = (v_p)\mathbf{i} + (gt)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = (g)\mathbf{j}$$

wartości chwilowe:

$$s = \text{sqrt}((v_p t)^2 + ((1/2)gt^2)^2)$$

$$v = \text{sqrt}((v_p)^2 + (gt)^2)$$

$$a = g$$

# Strzał z broni

$$\text{fps} = 30 \Rightarrow t = 1/30\text{s}$$

$$s_x = v_p * t$$

$$s_y = h + (-gt^2)/2$$

$$a_x = 0$$

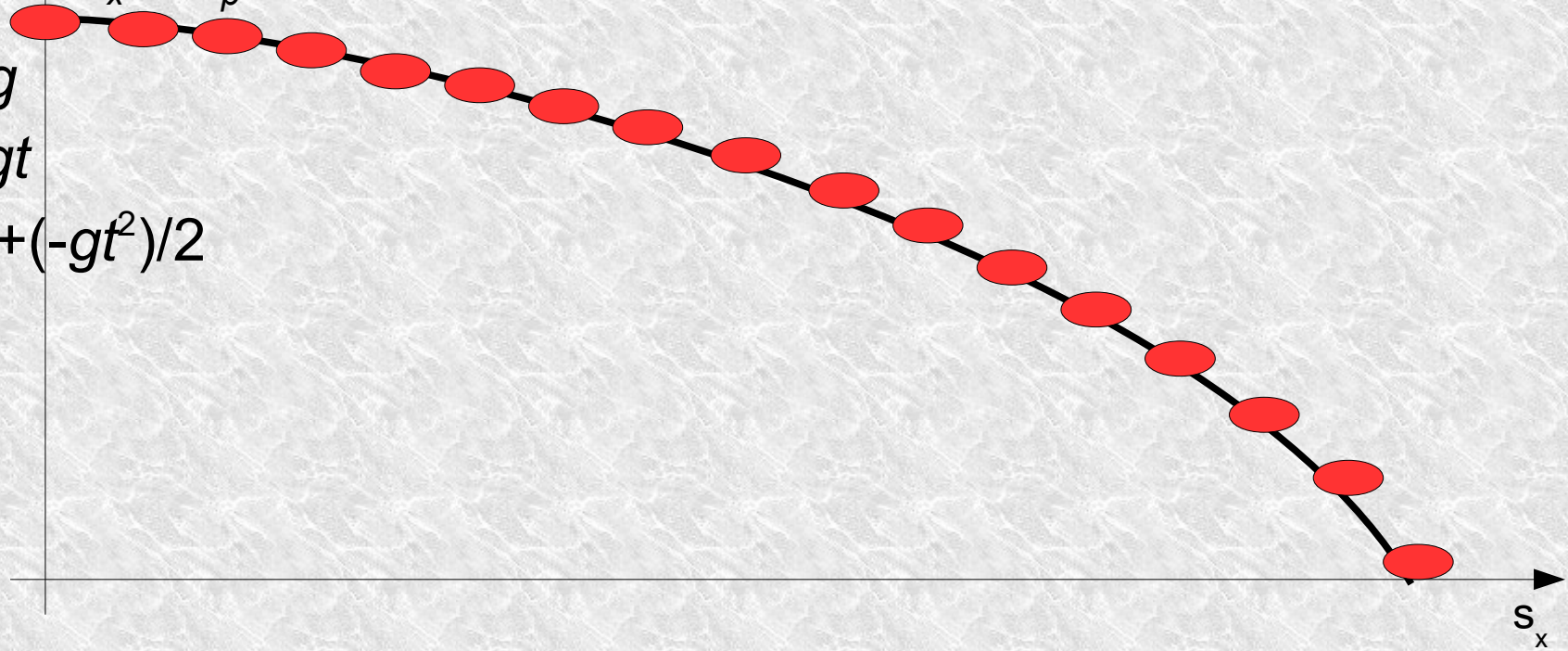
$$v_x = v_p$$

$$s_x = v_p t$$

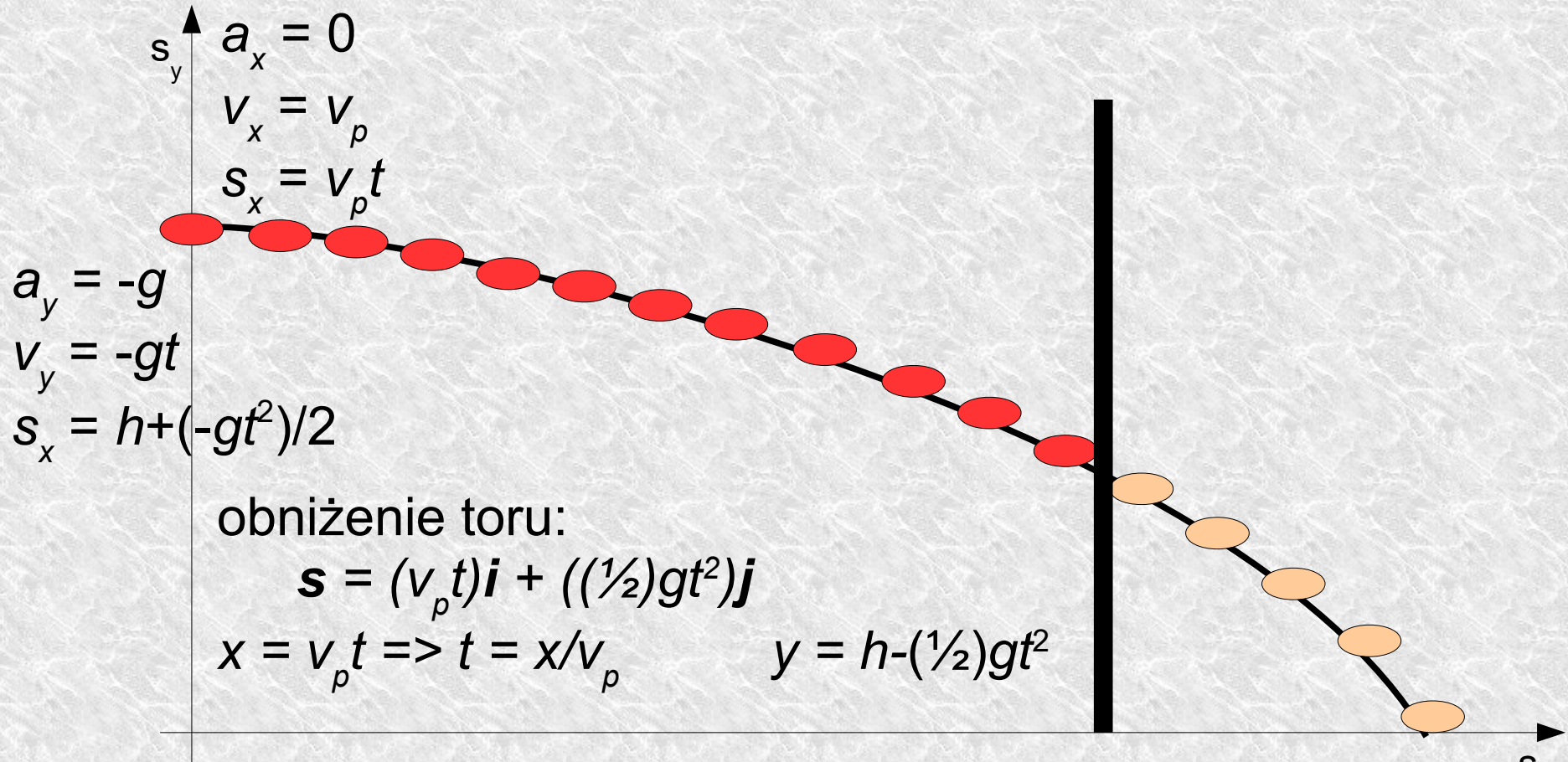
$$a_y = -g$$

$$v_y = -gt$$

$$s_y = h + (-gt^2)/2$$



# Strzał z broni



## **Strzał z armaty:**

składowe poziome:

$$x = (v_p \cos \theta_x) t \quad y = (v_p \cos \theta_y) t$$

$$v_x = v_p \cos \theta_x \quad v_y = v_p \cos \theta_y$$

$$a_x = a_y = 0$$

składowa pionowa:

$$z = (v_p \cos \theta_z) t - (1/2)gt^2$$

$$v_z = (v_p \cos \theta_z) - gt$$

$$a_z = -g$$

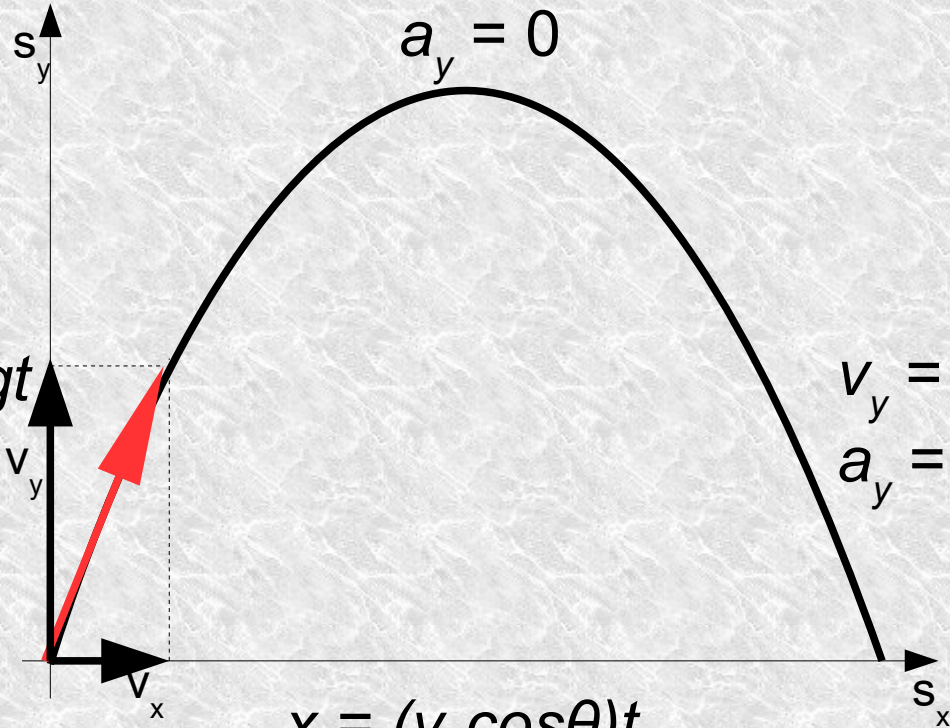
# Strzał z armaty

$$s_y = (v_p \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_y = (v_p \sin\theta) - gt$$
$$a_y = -g$$

$$y = h_{max}$$
$$v_y = 0$$
$$a_y = 0$$

$$v_y = (v_p \sin\theta) - gt$$
$$a_y = -g$$

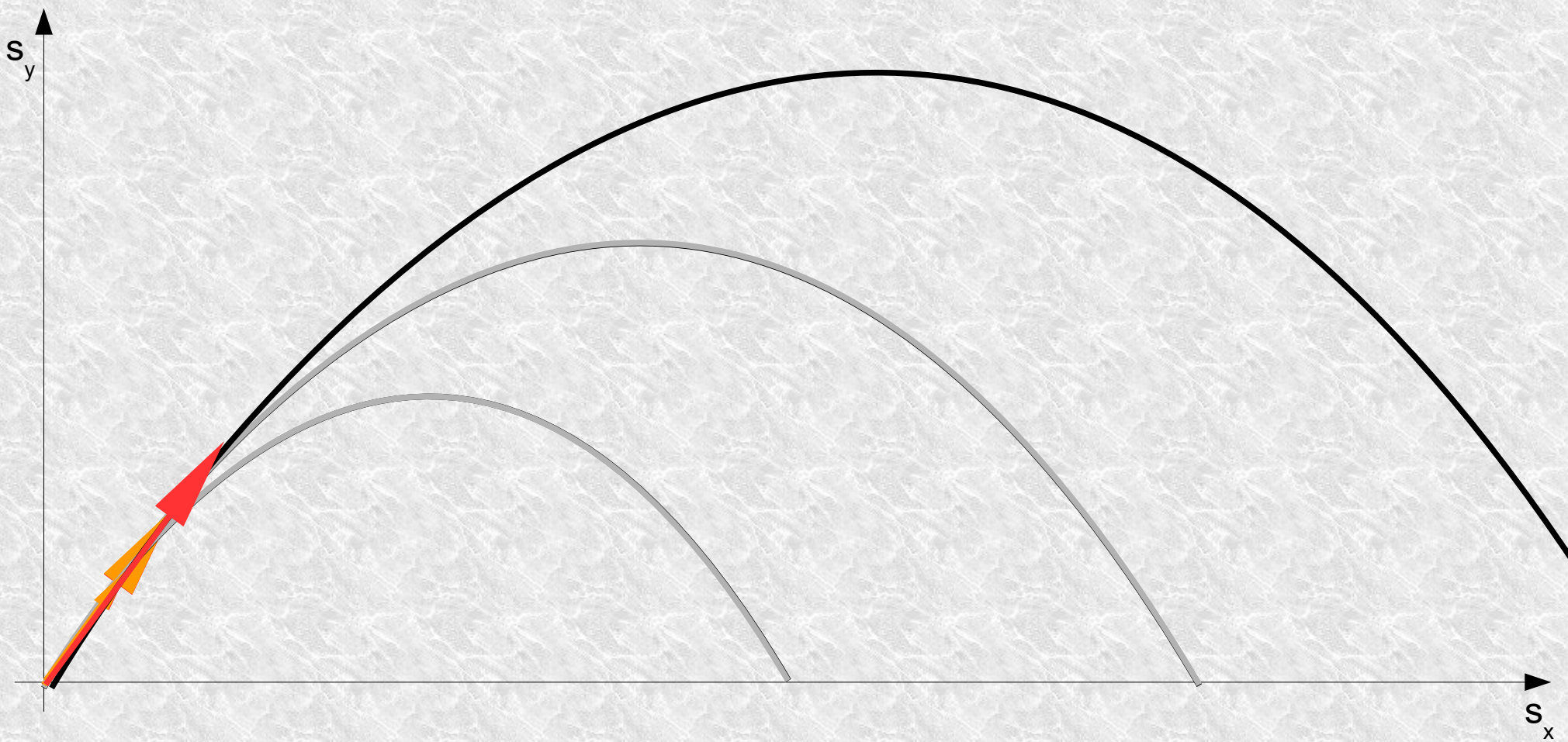
$$v_y = gt$$
$$a_y = g$$



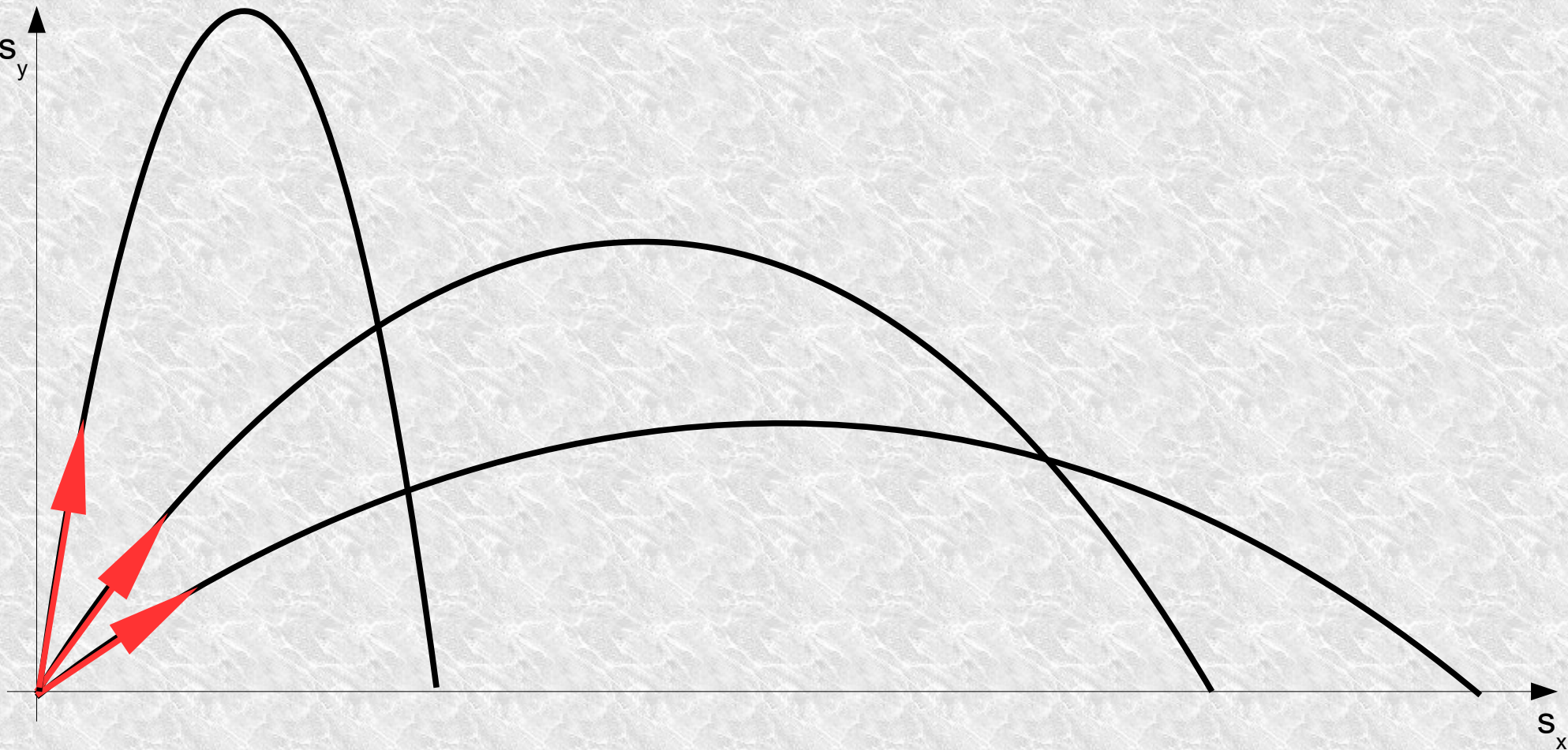
$$x = (v_p \cos\theta)t$$
$$v_x = v_p \cos\theta$$
$$a_x = a_y = 0$$



# Strzał z armaty

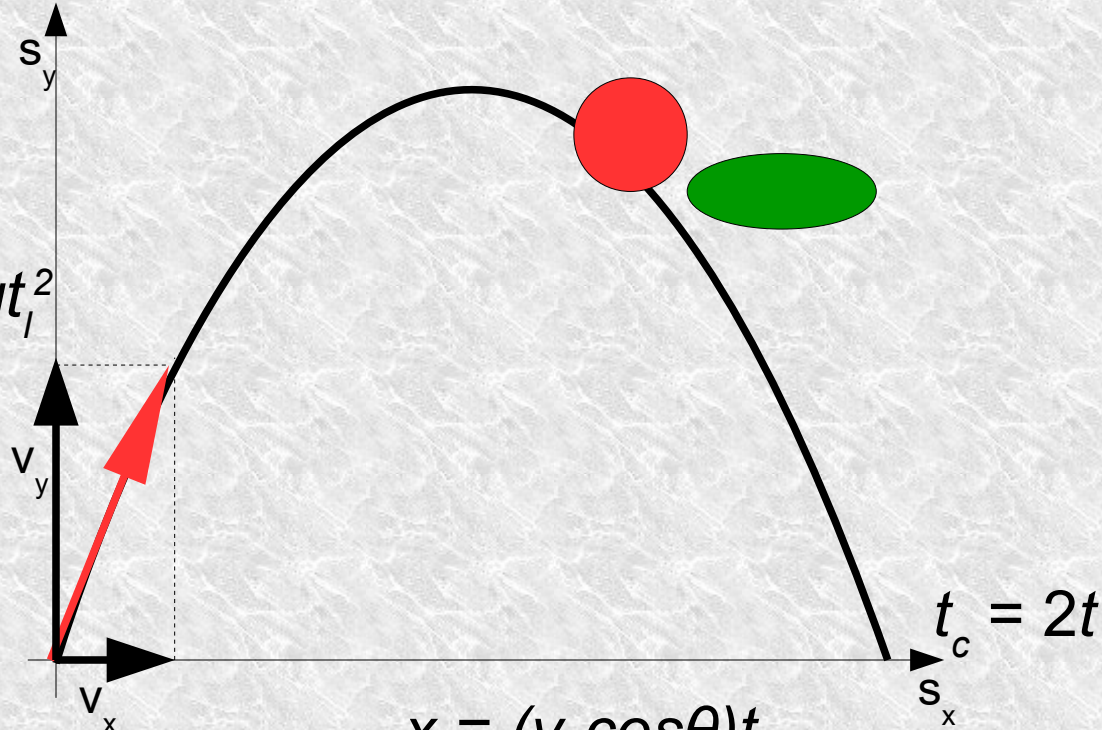


# Strzał z armaty



# Strzał z armaty

$$v_y = (v_p \sin\theta) - gt = 0$$
$$\Rightarrow t = (v_p \sin\theta) / g$$



$$y = (v_p \sin\theta)t_l - (1/2)gt_l^2$$

$$x = (v_p \cos\theta)t_k$$
$$\Rightarrow t_k = x / (v_p \cos\theta)$$
$$t_l = t_c - t_k$$

## Obrót:

$\omega$  – prędkość kątowna

$\alpha$  – przyspieszenie kątowe

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha(\Omega_2 - \Omega_1)$$

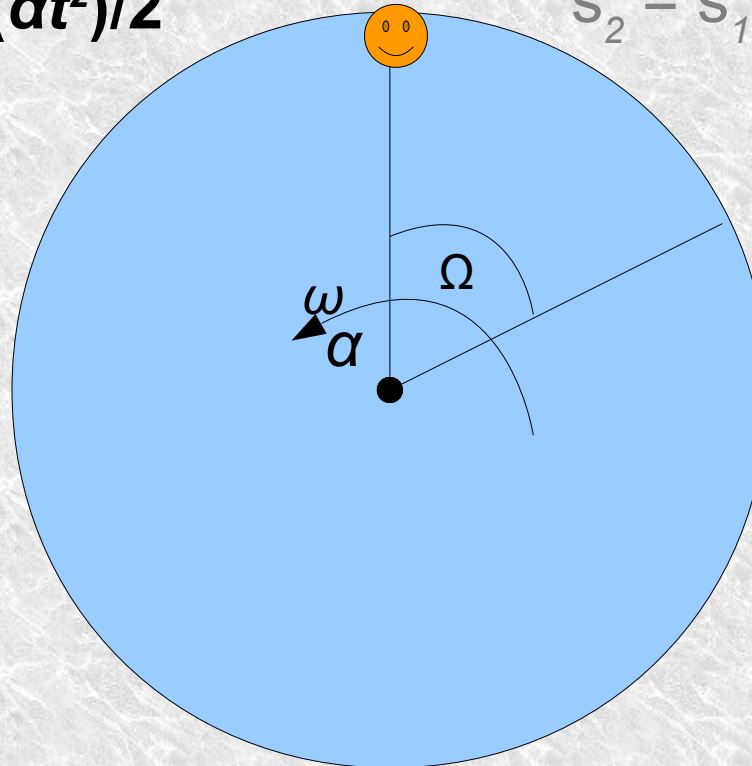
$$\Omega_2 = \Omega_1 + \omega_1 t + (\alpha t^2)/2$$

równania kinematyczne:

$$v_2 = v_1 + at$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(s_2 - s_1)$$

$$s_2 = s_1 + v_1 t + (at^2)/2$$



## Dla obrotu:

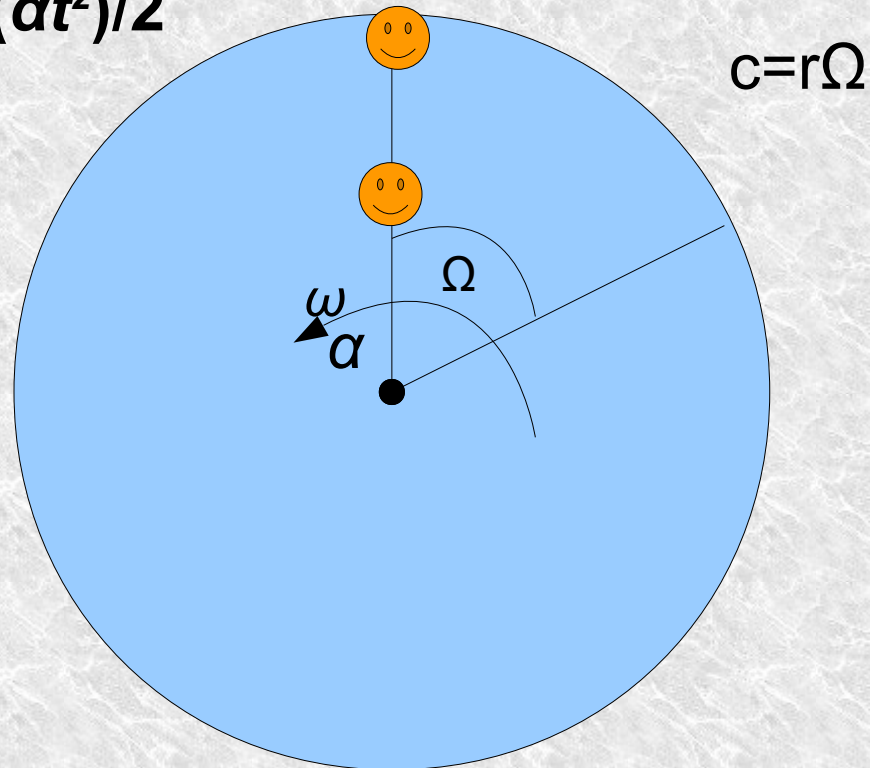
$\omega$  – prędkość kątowna

$\alpha$  – przyspieszenie kątowe

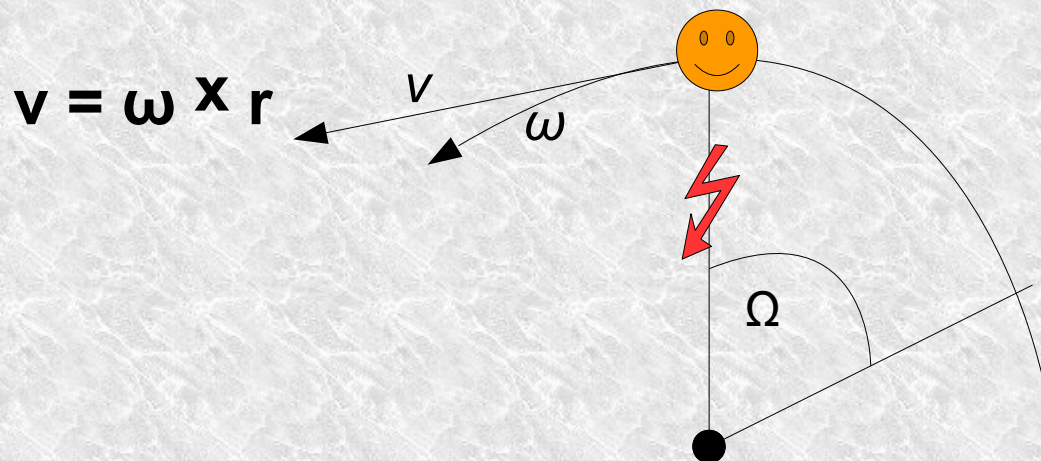
$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha(\Omega_2 - \Omega_1)$$

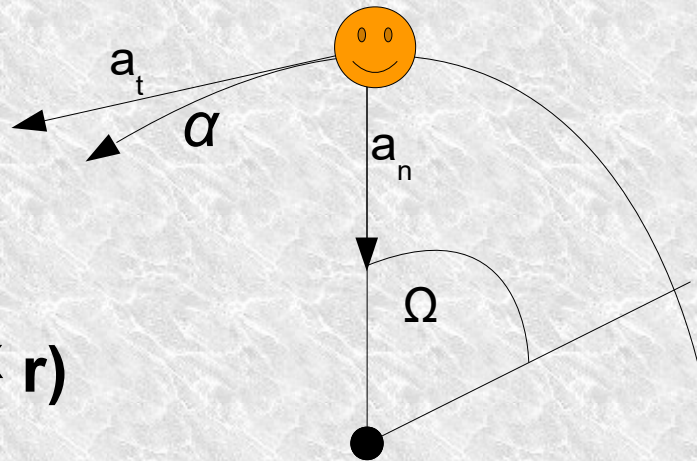
$$\Omega_2 = \Omega_1 + \omega_1 t + (\alpha t^2)/2$$



# Dla obrotu



# Dla obrotu



$$a_n = \omega \times (\omega \times r)$$

$$a_t = \alpha \times r$$

Dla punktu P:

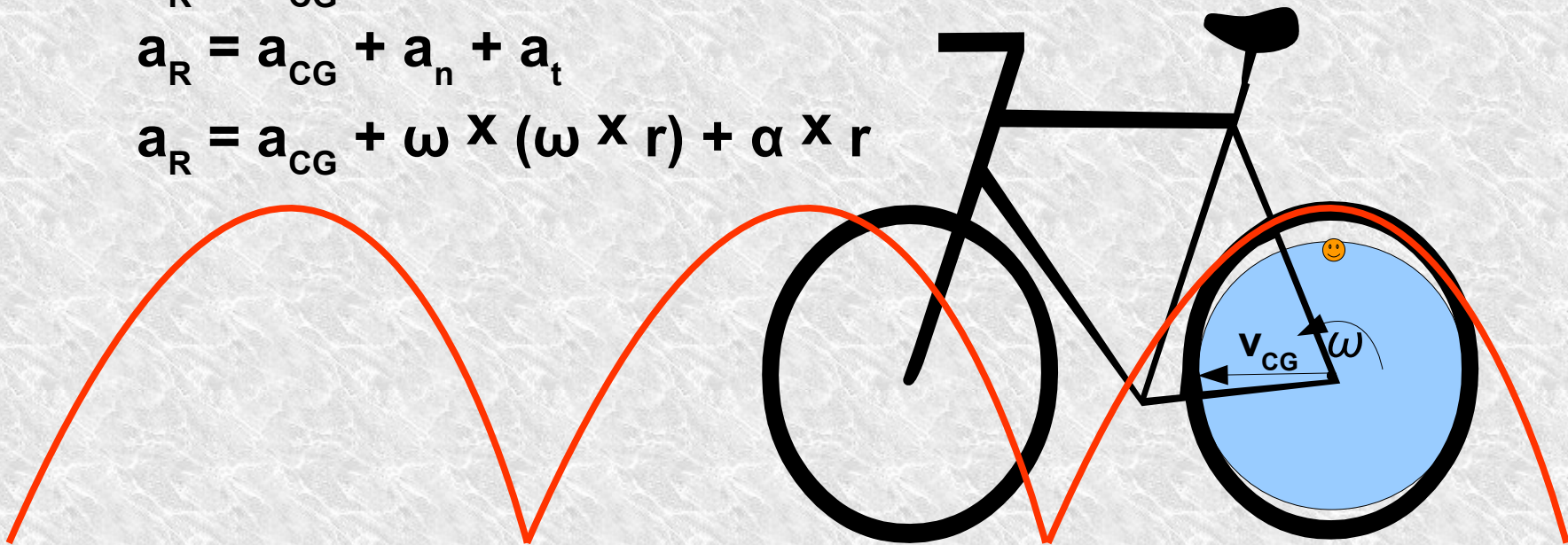
- oddalonego o  $r$  od środka masy ciała,
- środek masy porusza się z  $v_{CG}$  po prostej,
- ciało obraca się z  $\omega$ ,  $v_t$  wokół środka masy

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{CG} + \mathbf{v}_t$$

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{CG} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_{CG} + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_{CG} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$





**Środek masy (środek ciężkości)** – punkt, w którym przyłożenie siły nie wprawi ciała w ruch obrotowy.

masa = gęstość\*objętość

masa = suma mas cząstek składowych

Środek masy:

$$x_{cm} = (\sum x_i m_i) / (\sum m_i)$$

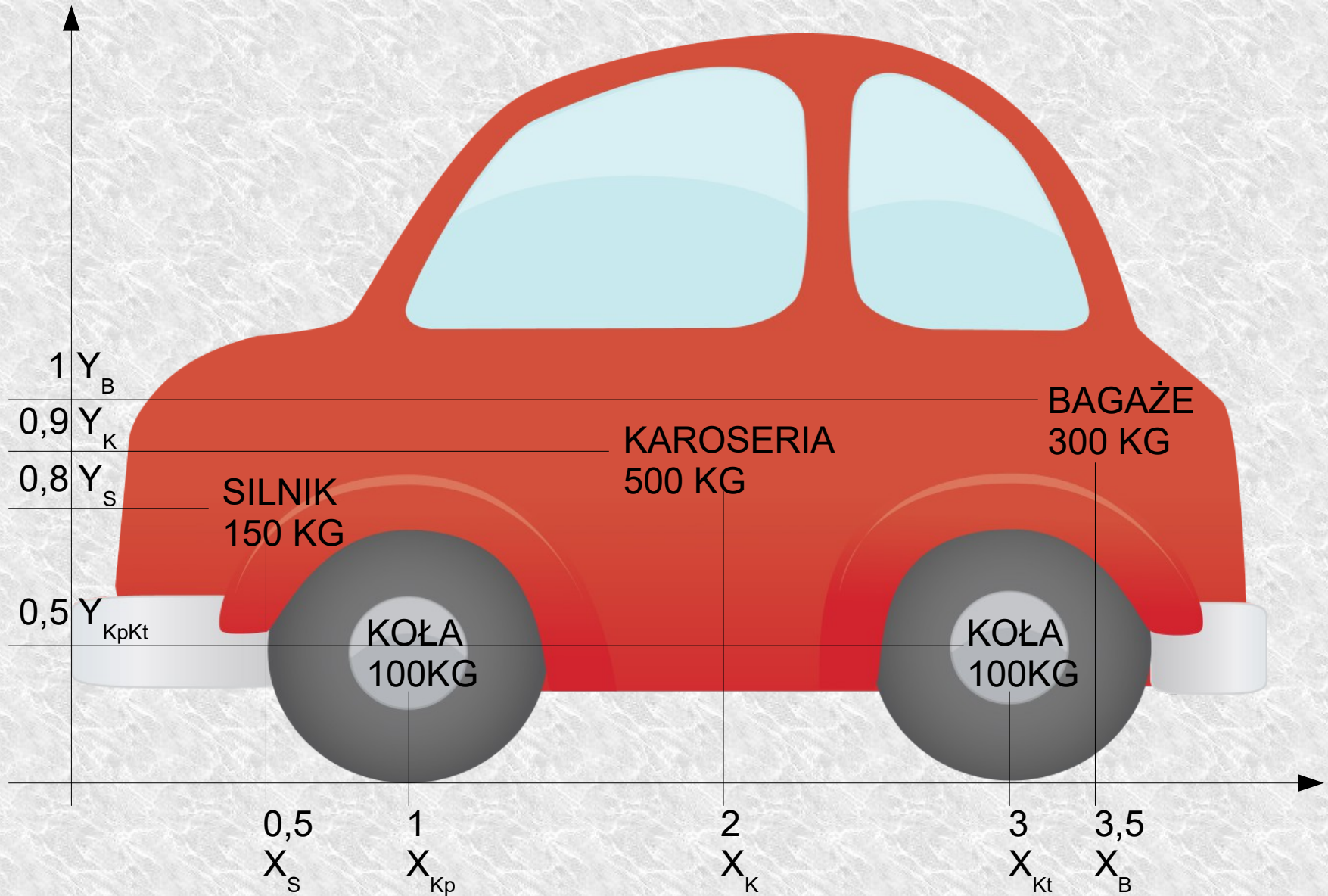
$$y_{cm} = (\sum y_i m_i) / (\sum m_i)$$

$$z_{cm} = (\sum z_i m_i) / (\sum m_i)$$

$$m = \sum m_i$$

$$\mathbf{R}_{CG} = (\sum \mathbf{r}_{CGi} m_i) / m$$

# Środek masy (środek ciężkości)



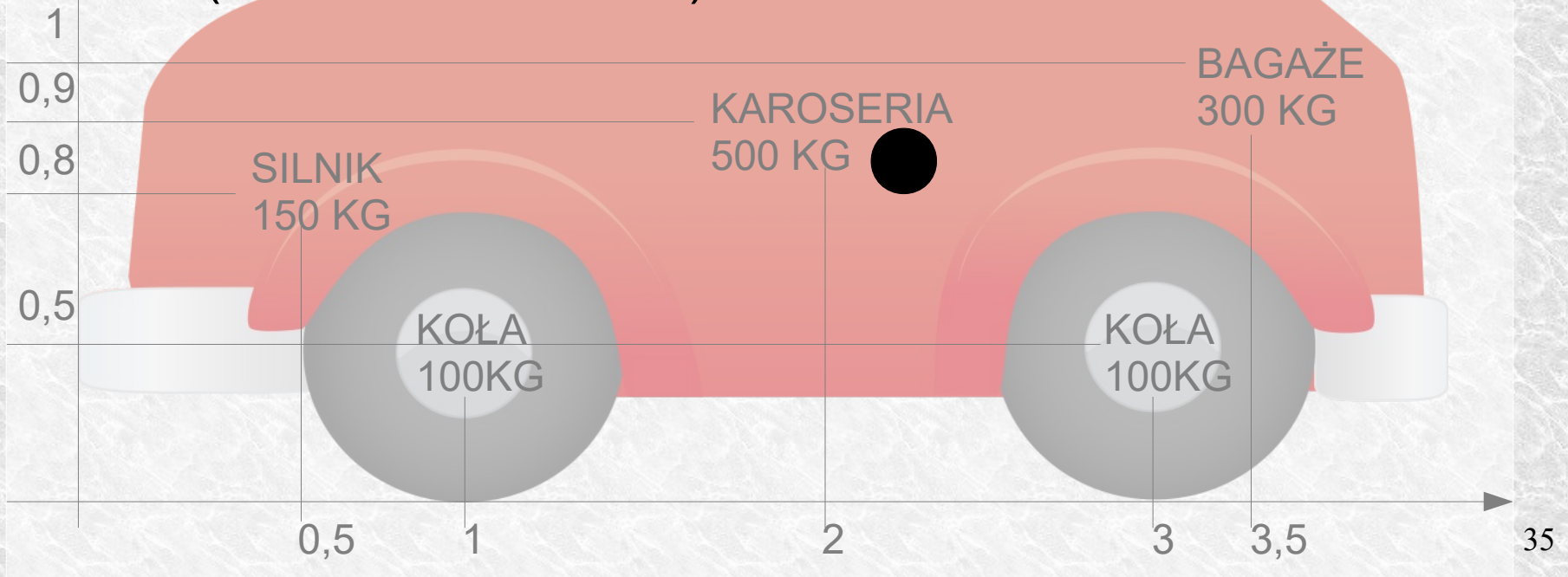
# Środek masy (środek ciężkości)

$$x_{cm} = (\sum x_i m_i) / (\sum m_i)$$

$$x_{cm} = (150 \cdot 0,5 + 100 \cdot 1 + 500 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 3,5) / (150 + 100 + 500 + 100 + 300) = 2,2$$

$$y_{cm} = (\sum y_i m_i) / (\sum m_i)$$

$$y_{cm} = (200 \cdot 0,5 + 150 \cdot 0,8 + 500 \cdot 0,9 + 300 \cdot 1) / (150 + 200 + 500 + 300) = 0,85$$



Siła:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Pęd:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$$

( $v$  – prędkość środka ciężkości)

$$\mathbf{F} = \Delta\mathbf{P} / \Delta t$$

## Moment bezwładności $I_0$ :

walec pełny:

$$I_{xx} = I_{yy} = (1/4)mr^2 + (1/12)ml^2, \quad I_{zz} = (1/2)mr^2$$

prostopadłościan pełny:

$$I_{xx} = (1/12)m(a^2 + l^2), \quad I_{yy} = (1/12)m(b^2 + l^2),$$

$$I_{zz} = (1/12)m(a^2 + b^2)$$

kula pełna:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = (2/5)mr^2$$

## Twierdzenie Steinera:

$$I = I_0 + md^2$$

$I_0$  – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,

$I$  – moment bezwładności względem osi równoległej do  $I_0$ ,

$d$  – odległość między osiami,

$m$  – masa bryły.

## Moment siły

$$\mathbf{M}_{CG} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$M_{CG}$  – moment siły  $F$  względem środka ciężkości,  
 $r$  – odległość linii działania  $F$  od środka ciężkości,

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x$$

## Moment siły:

$$\mathbf{M}_{CG} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_{CG} = I \alpha$$

$I$  – moment bezwładności

$\alpha$  – przyspieszenie kątowe

## Moment pędu ciała:

$$\mathbf{L}_{CG} = \Sigma (\mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))$$

$\boldsymbol{\omega}$  – prędkość kąтова

$$\mathbf{L}_{CG} = I \boldsymbol{\omega}$$

Siła:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Pęd:

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \Delta \mathbf{P} / \Delta t$$



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{M}_{CG} = I\alpha$$

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$

$$|\Sigma \mathbf{F}| = \text{sqrt}((\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2)$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$a = \text{sqrt}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)$$

$$\Sigma M_{CG} = I\alpha$$

## **Sposób postępowania:**

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.

# Siły

Tarcie statyczne:

$$F_{Tmax} = \mu_s N$$

$\mu_s$  – współczynnik tarcia statycznego

N – siła oddziaływania ciała z podłożem

Tarcie kinetyczne:

$$F_{Tk} = \mu_k N$$

$\mu_k$  – współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k < \mu_s$

Opór cieczy lepkiej:

$F = -Cv$  dla ciał wolno poruszających się w cieczy

C – współczynnik oporu cieczy lepkiej

v – prędkość ciała

$F = -Cv^2$  dla ciał szybko poruszających się w cieczy

$C <> C$

Ciśnienie:

$$F=PA$$

P – ciśnienie

$$P = \rho gh$$

$\rho$  – gęstość cieczy

h – głębokość

A – powierzchnia

Siła wyporu:

$$F_{wyp} = \rho g V \quad \text{dla prostopadłościanu o objętości } V$$

Siła sprężystości:

$$F_S = k_S (L - r)$$

$k_S$  – współczynnik sprężystości

$L$  – długość odkształconej sprężyny

$r$  – długość sprężyny nieodkształconej

Siła tłumiąca amortyzatorów:

$$F_{tł} = k_{tł} (v_1 - v_2)$$

$k_{tł}$  – współczynnik tłumienia

$(v_1 - v_2)$  – względna prędkość punktów połączenia  
należących do dwóch połączonych ciał

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

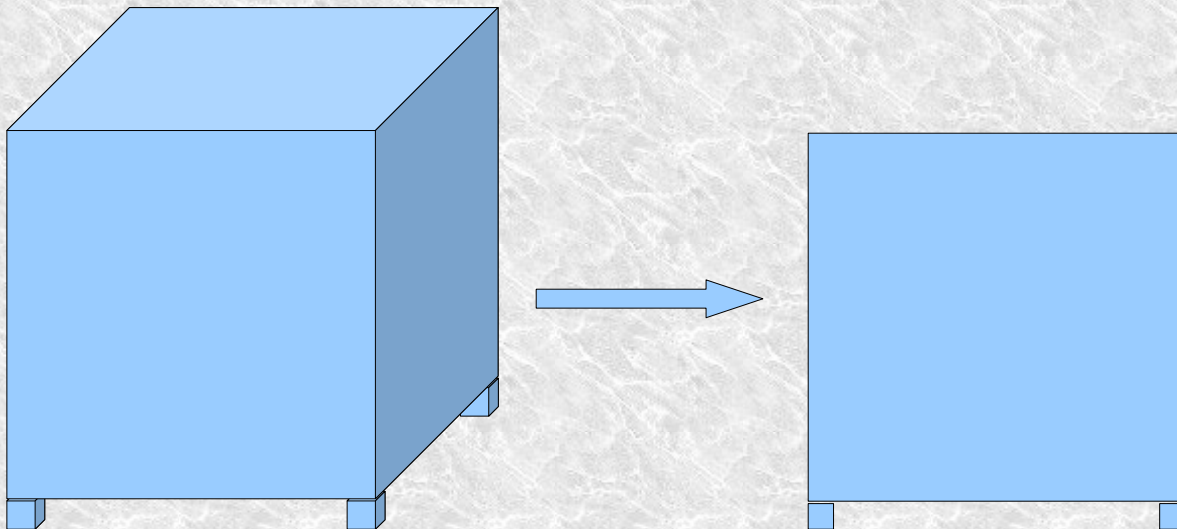
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

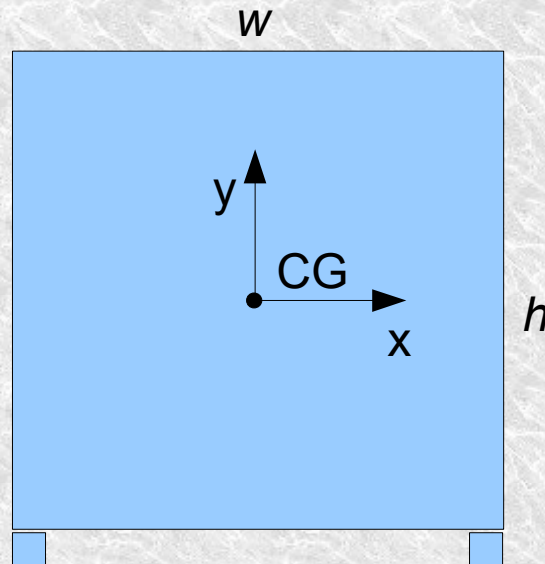
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

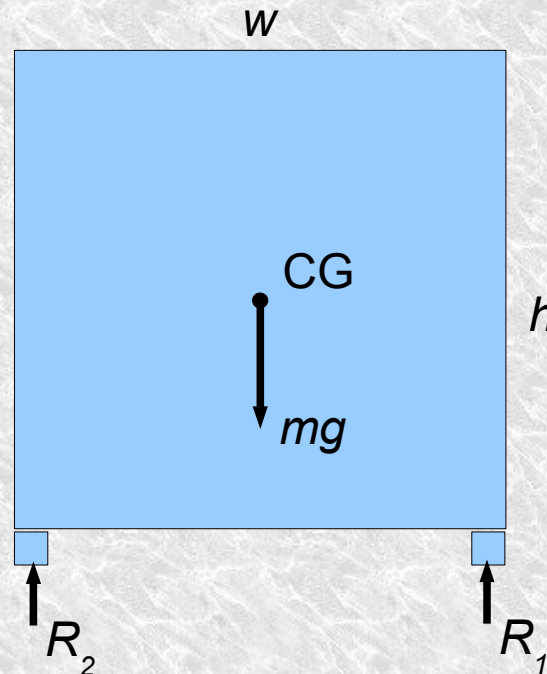
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$



## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

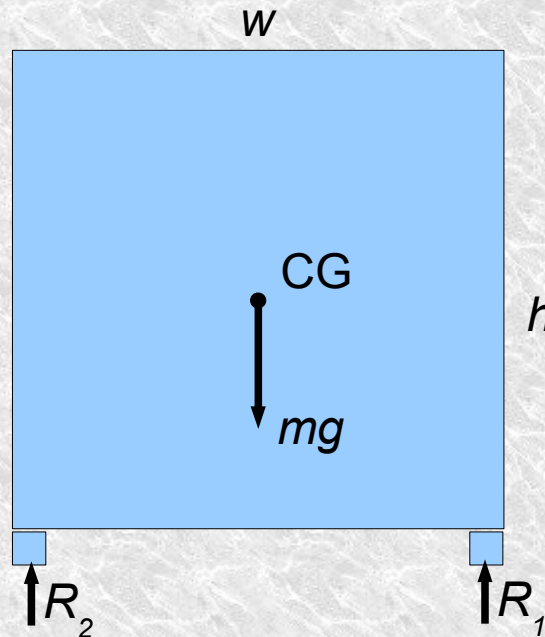
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$\mathbf{a} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = 0$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\mathbf{s} = 0, \quad \Omega = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

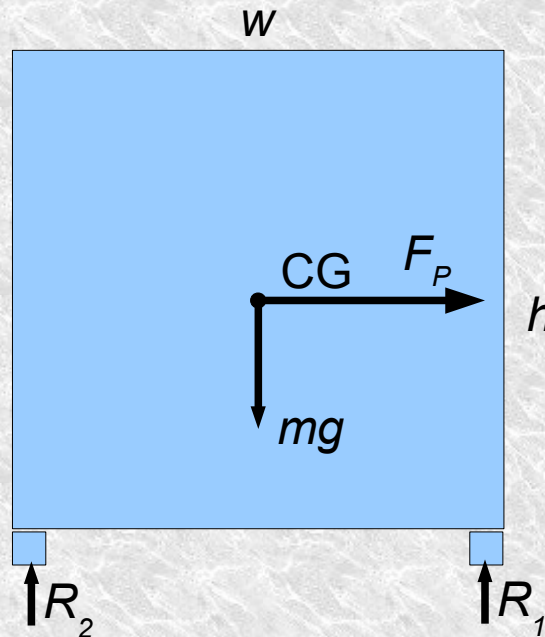
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

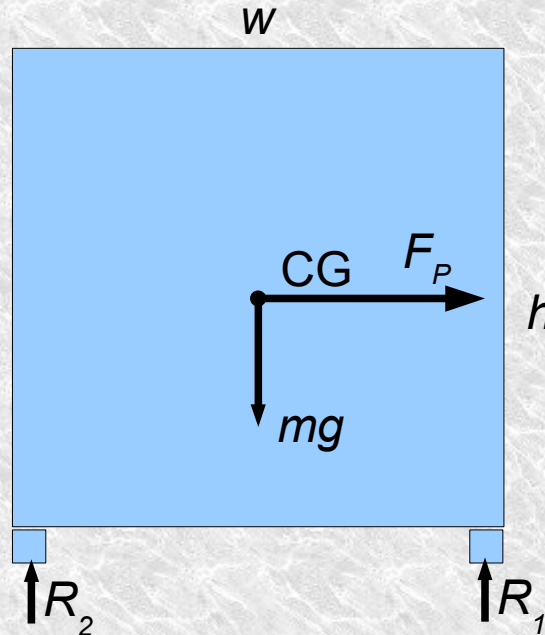
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$a_x = \Sigma F_x / m, \quad a_y = 0, \quad \alpha = 0$$

$$v_x = a_x t, \quad v_y = 0, \quad \omega = 0$$

$$s_x = (a_x t^2) / 2, \quad s_y = 0, \quad \Omega = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

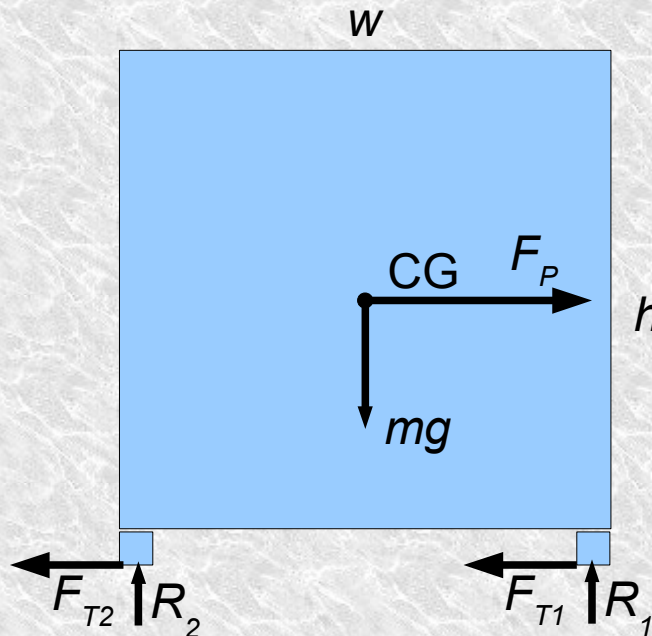
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P - F_{T1} - F_{T2} = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

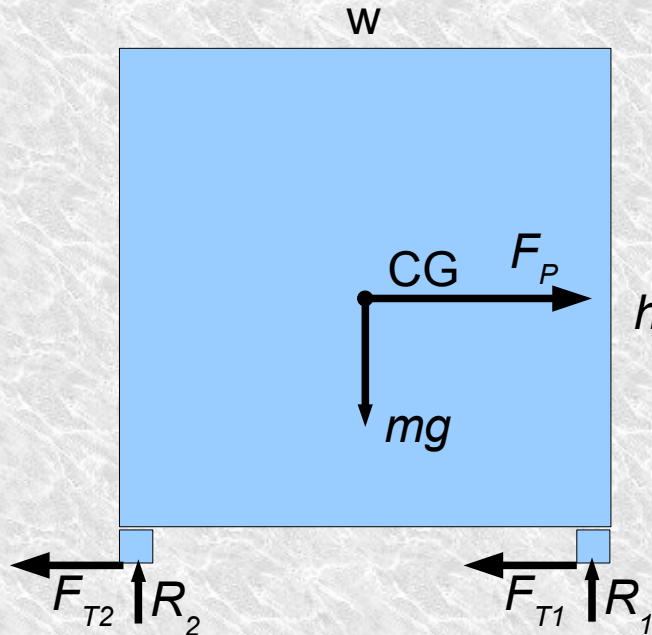
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P - F_{T1} - F_{T2} = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad \alpha = 0$$

$$v_x = \text{const}, \quad v_y = 0, \quad \omega = 0$$

$$s_x = v_x t, \quad s_y = 0, \quad \Omega = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

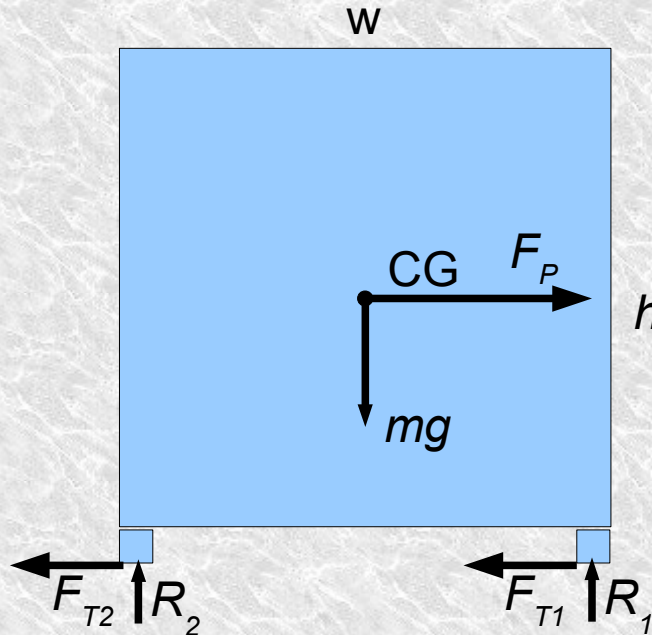
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P - F_{T1} - F_{T2} = ma_x$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$a_x = \text{const}, \quad a_y = 0, \quad \alpha = 0$$

$$v_x = a_x t, \quad v_y = 0, \quad \omega = 0$$

$$s_x = (a_x t^2)/2, \quad s_y = 0, \quad \Omega = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

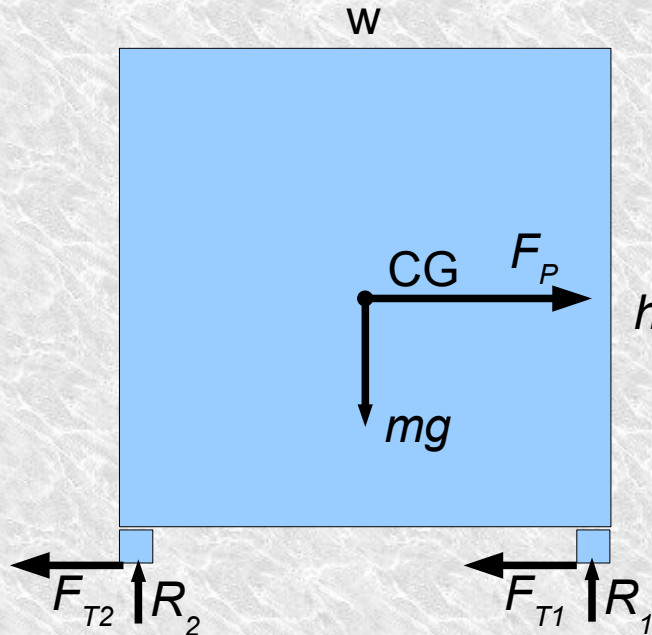
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P - F_{T1} - F_{T2} = m(-a_x)$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$a_x = \text{const}, \quad a_y = 0, \quad \alpha = 0$$

$$v_x = v_0 - a_x t, \quad v_y = 0, \quad \omega = 0$$

$$s_x = (a_x t^2)/2, \quad s_y = 0, \quad \Omega = 0$$

## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

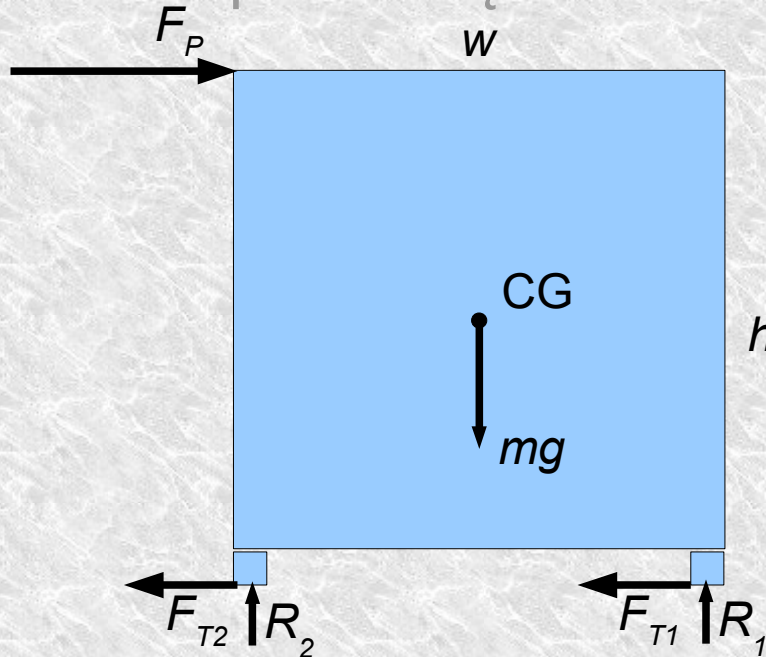
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma F_x = F_P - F_{T1} - F_{T2} = ma_x$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$h \Sigma M_{CG} = F_P(h/2) + R_2(w/2) + R_1(w/2) + F_{T1}(h/2) + F_{T2}(h/2) = I\alpha = 0$$



## Sposób postępowania:

Obliczanie właściwości ciała (masa, środek masy, moment bezwładności).

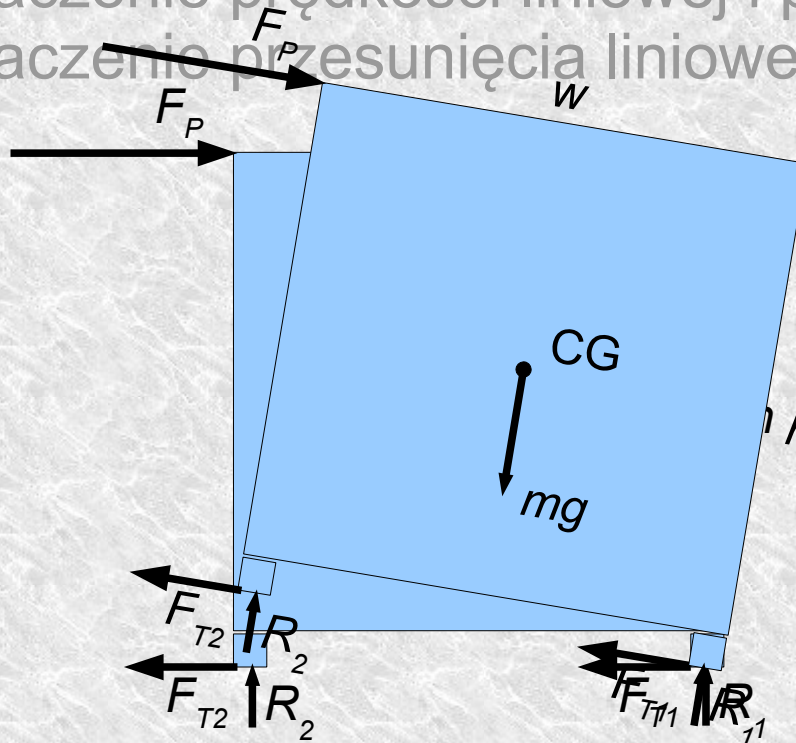
Identyfikacja i ocena jakościowa wszystkich sił i momentów sił działających na ciało.

Obliczenie sum wektorowych wszystkich sił i momentów sił.

Rozwiązanie równań ruchu postępowego i obrotowego.

Wyznaczenie prędkości liniowej i prędkości kątowej.

Wyznaczenie przesunięcia liniowego i kątowego.



$$\Sigma M_{CG} = F_P(h/2) + R_2(w/2) + R_1(w/2) + F_{T1}(h/2) + F_{T2}(h/2) = I\alpha = 0$$

$$R_2 = 0, R_1 = -mg, F_{T2} = 0$$

$$\Sigma M_{CG} = F_P(h/2) + 0 - mg(w/2) + F_{T1}(h/2) + 0 = 0$$

$$F_P = mg(w/h) - F_{T1}$$

## Energia kinetyczna:

$$E_k = mv^2/2$$

w ruchu postępowym

$$E_k = I\omega^2/2$$

w ruchu obrotowym

## Energia potencjalna:

$$E_p = mgh$$

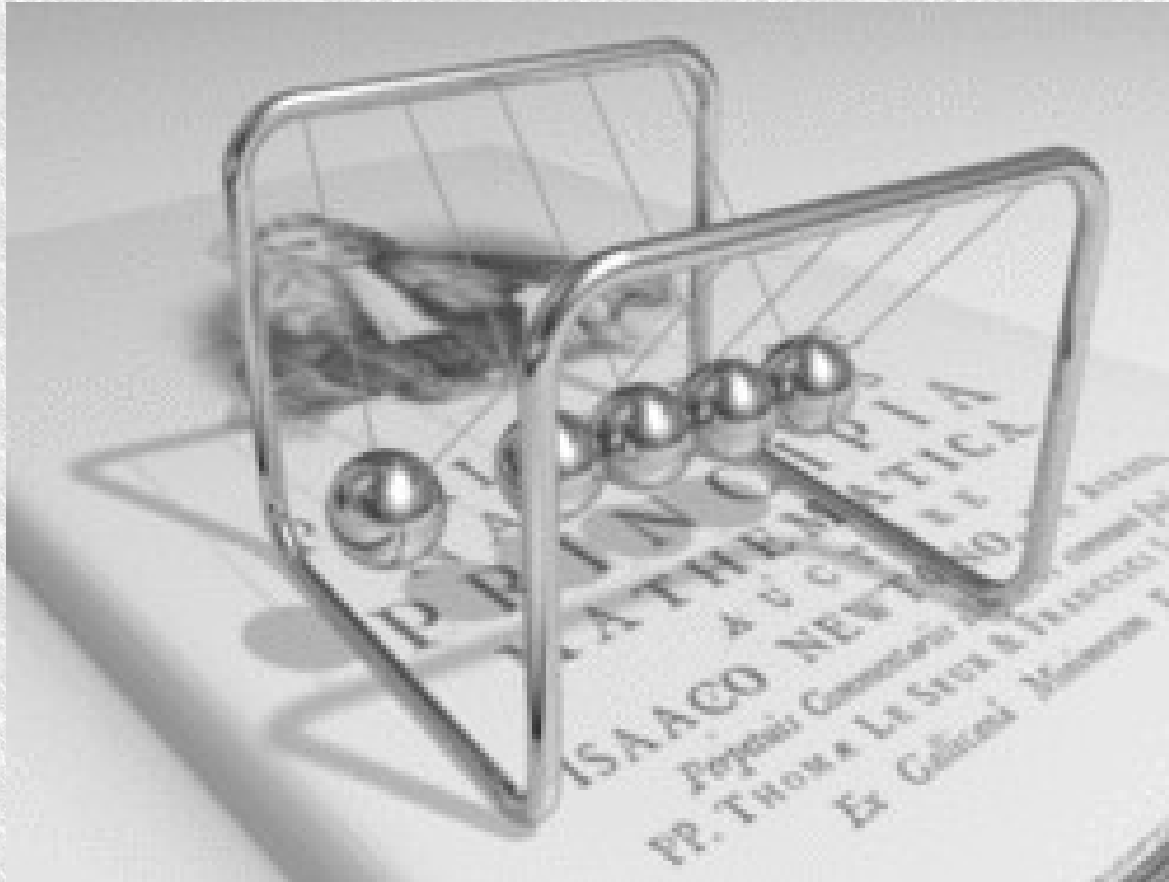
grawitacyjna

$$E_s = kx^2/2$$

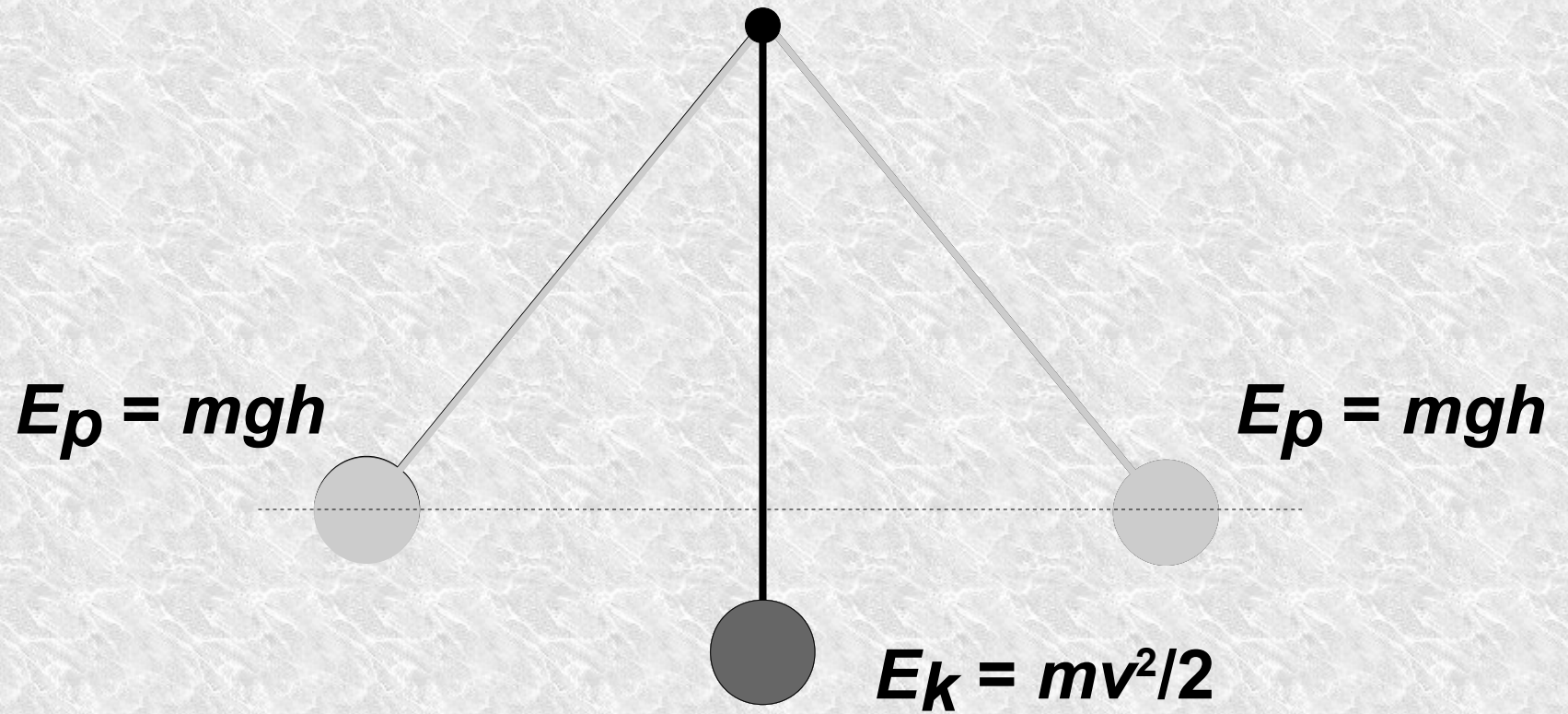
sprężystości

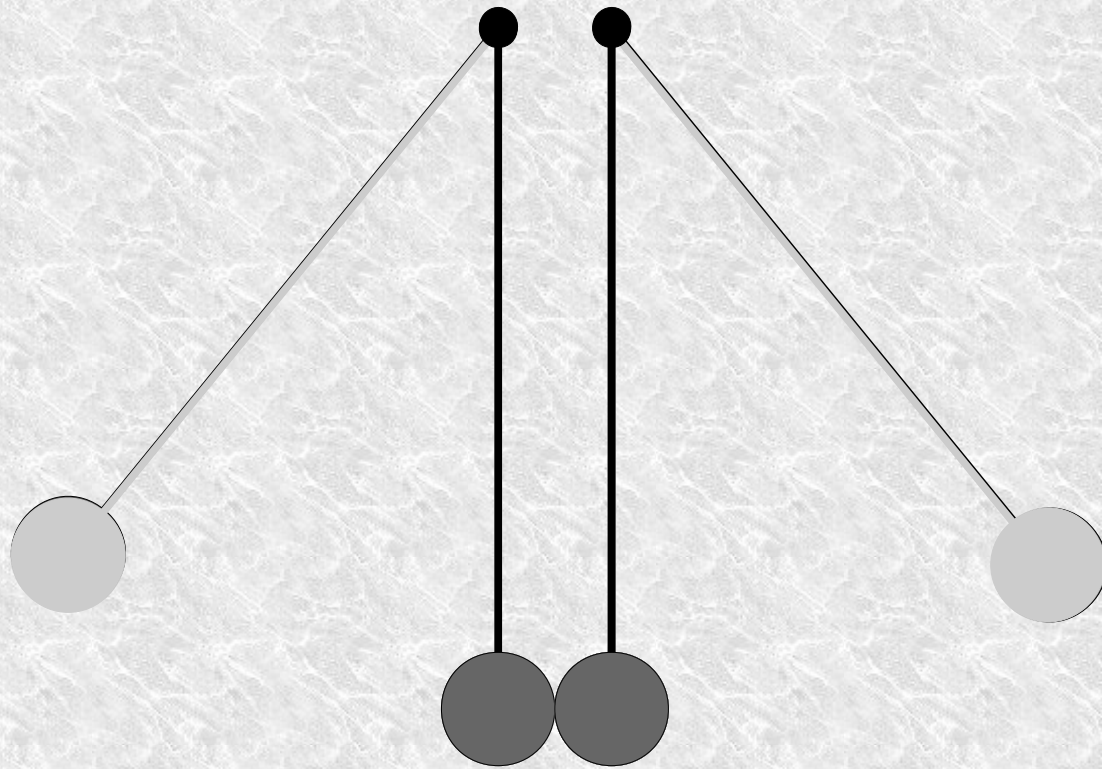
$k$  - stała sprężystości sprężyny

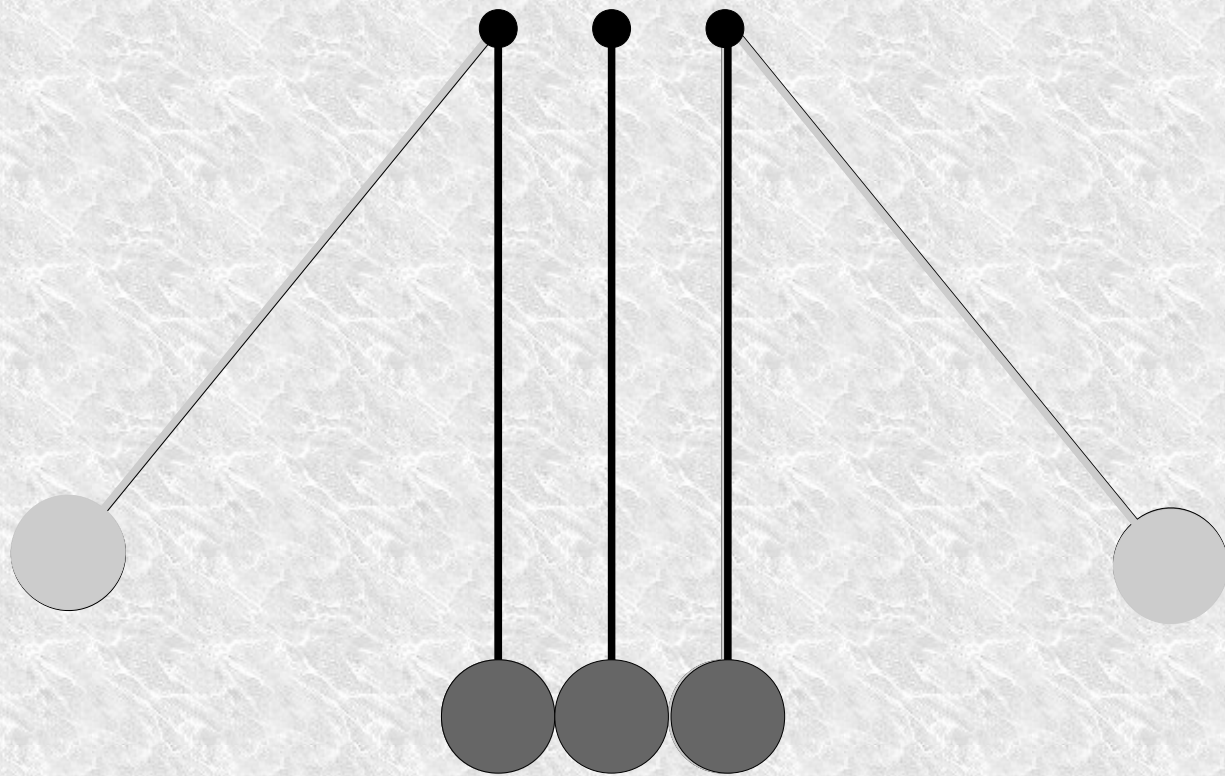
$x$  - wielkości rozciągnięcia (przesunięcia końca sprężyny)

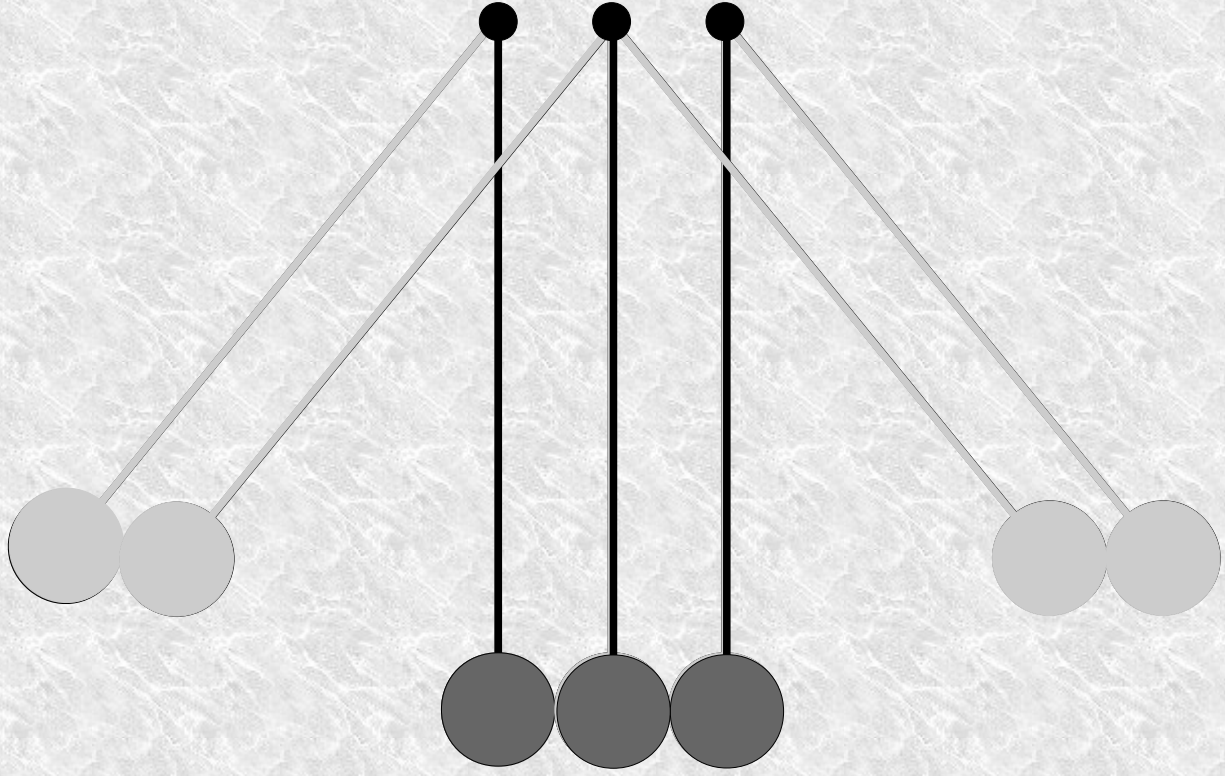


<https://pl.wikipedia.org/>









## **Siła impulsowa**

– krótko działająca siła o dużej wartości.

**Popęd** (impuls) – zmiana pędu [Ns]:

$$\text{impuls liniowy} = m(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$$

$$\text{impuls kątowy} = I(\boldsymbol{\omega}_+ - \boldsymbol{\omega}_-)$$

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)/(t_+ - t_-)$$

$$\mathbf{M} = I(\boldsymbol{\omega}_+ - \boldsymbol{\omega}_-)/(t_+ - t_-)$$



## Zderzenia doskonałe sprężyste:

- suma pędów obiektów przed zderzeniem  
= suma pędów obiektów po zderzeniu,
- suma energii obiektów przed zderzeniem  
= suma energii obiektów po zderzeniu.

$$m_1 v_{1-} + m_2 v_{2-} = m_1 v_{1+} + m_2 v_{2+}$$
$$(m_1 v_{1-}^2)/2 + (m_2 v_{2-}^2)/2 = (m_1 v_{1+}^2)/2 + (m_2 v_{2+}^2)/2$$



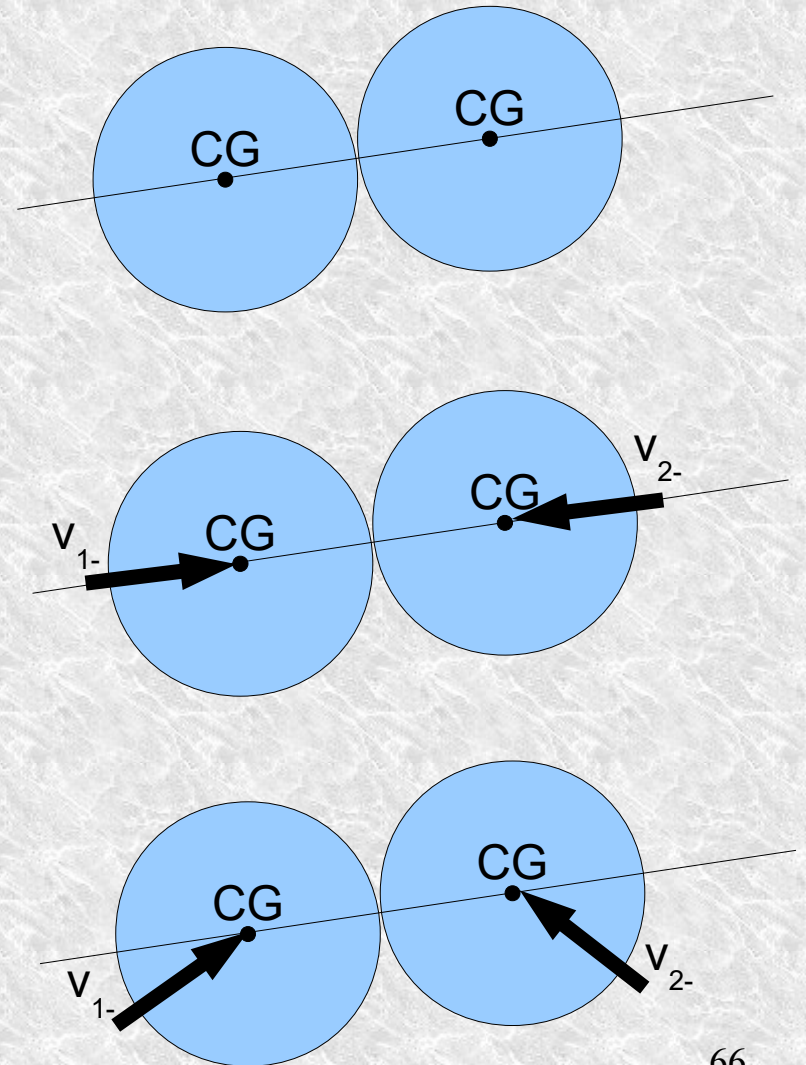
$$v_{1+} = v_{1-} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(2m_2)}{(m_1 + m_2)}$$
$$v_{2+} = v_{1-} \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

**Linia akcji** - linia, wzdłuż której działają siły zderzeniowe (impulsowe), prostopadła do zderzających się powierzchni.

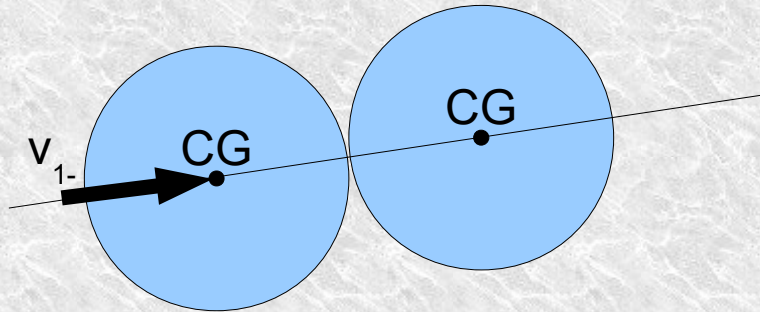
**Zderzenie centralne** - linia akcji przechodzi przez środki mas zderzających się ciał.

**Zderzenie na wprost** - prędkości ciał leżą wzdłuż linii akcji.

**Zderzenie skośne** - prędkości ciał nie układają się wzdłuż linii akcji.



# Zderzenie na wprost idealnie sprężyste



$$m_1 = m_2 = 156g$$

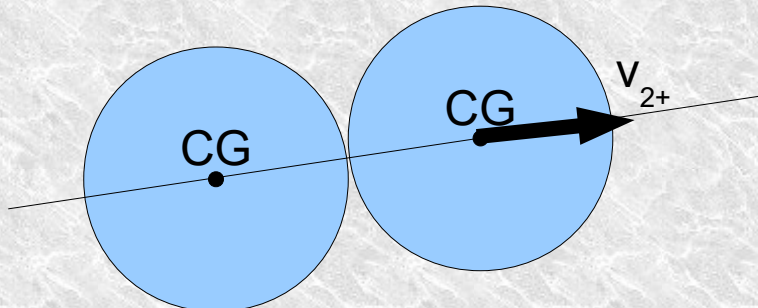
$$v_{1-} = 5\text{m/s}, \quad v_{2-} = 0$$

$$v_{1+} = v_{1-} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(2m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{2+} = v_{1-} \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{1+} = v_{1-} \frac{(0)}{(2m)} + 0 \frac{(2m)}{(2m)}$$

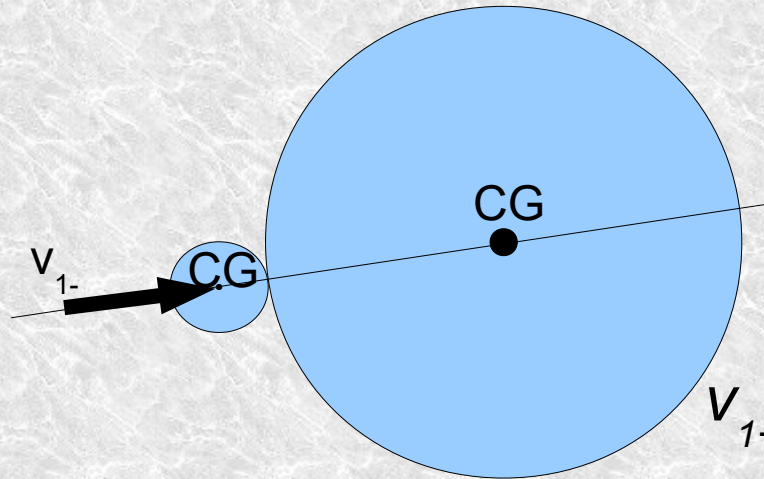
$$v_{2+} = v_{1-} \frac{(2m)}{(2m)} + 0 \frac{(0)}{(2m)}$$



$$m_1 = m_2 = 156g$$

$$v_{1+} = 0, \quad v_{2+} = 5\text{m/s}$$

# Zderzenie na wprost idealnie sprężyste



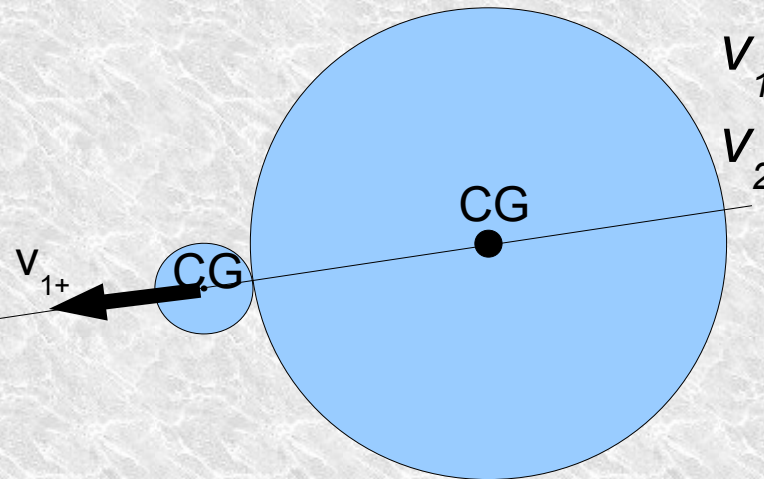
$$m_1 < m_2$$

$$m_1 = 156g, \quad m_2 = 156kg$$

$$v_{1-} = 5m/s, \quad v_{2-} = 0$$

$$v_{1+} = v_{1-} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_{2-} \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2+} = v_{1-} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_{2-} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$



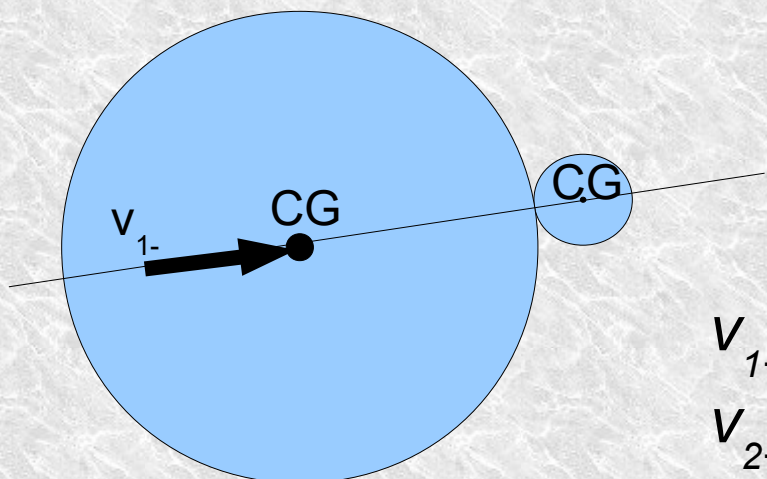
$$v_{1+} = v_{1-} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + 0 \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2+} = v_{1-} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} + 0 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 = 156g, \quad m_2 = 156kg$$

$$v_{1+} \approx -5m/s, \quad v_{2+} \approx 0$$

# Zderzenie na wprost idealnie sprężyste



$$m_1 > m_2$$

$$m_1 = 156\text{kg}, \quad m_2 = 156\text{g}$$

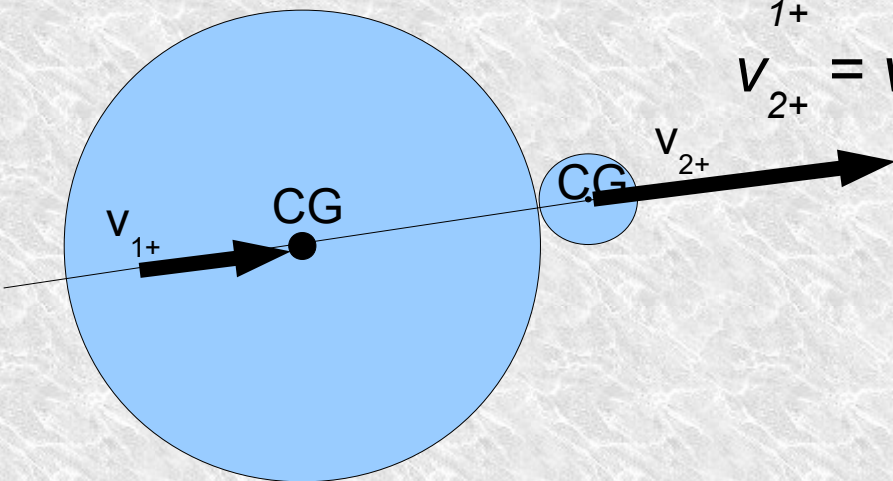
$$v_{1-} = 5\text{m/s}, \quad v_{2-} = 0$$

$$v_{1+} = v_{1-} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(2m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{2+} = v_{1-} \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{1+} = v_{1-} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + 0 \frac{(2m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

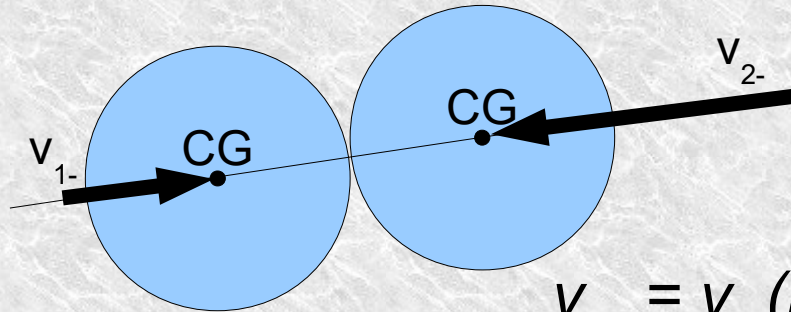
$$v_{2+} = v_{1-} \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)} + 0 \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$$



$$m_1 = 156\text{kg}, \quad m_2 = 156\text{g}$$

$$v_{1+} \approx 5\text{m/s}, \quad v_{2+} \approx 10\text{m/s}$$

# Zderzenie na wprost idealnie sprężyste



$$m_1 = m_2 = 156g$$

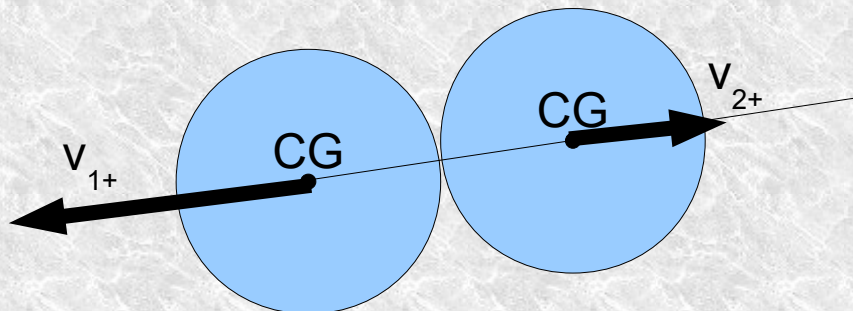
$$v_{1-} = 5\text{m/s}, \quad v_{2-} = 10\text{m/s}$$

$$v_{1+} = v_{1-} \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(2m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{2+} = v_{1-} \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)} + v_{2-} \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{1+} = \cancel{v_{1-} (0)/(2m)} + v_{2-} (2m)/(2m)$$

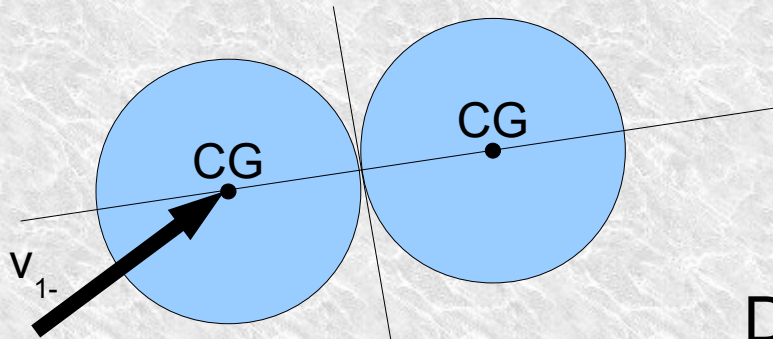
$$v_{2+} = v_{1-} (2m)/(2m) + \cancel{v_{2-} (0)/(2m)}$$



$$m_1 = m_2 = 156g$$

$$v_{1+} = 10\text{m/s}, \quad v_{2+} = 5\text{m/s}$$

# Zderzenie skośne idealnie sprężyste

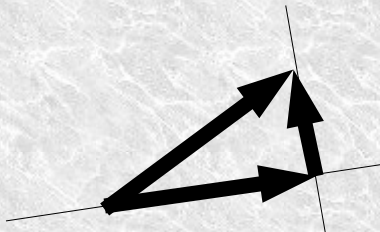


$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n$$

Dla prędkości normalnej pozostaje:

$$v_{1n+} = 0$$

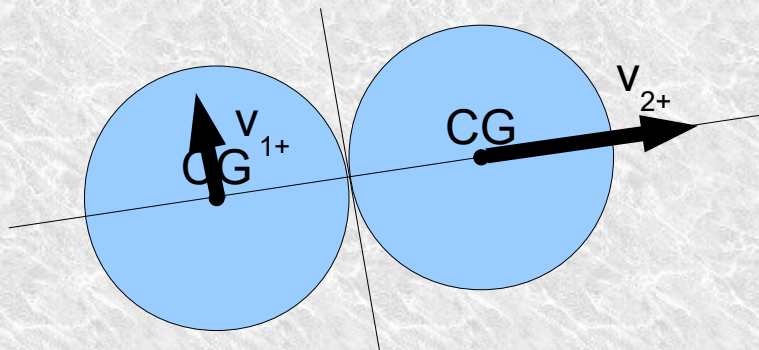
$$v_{2n+} = v_{1n-}$$



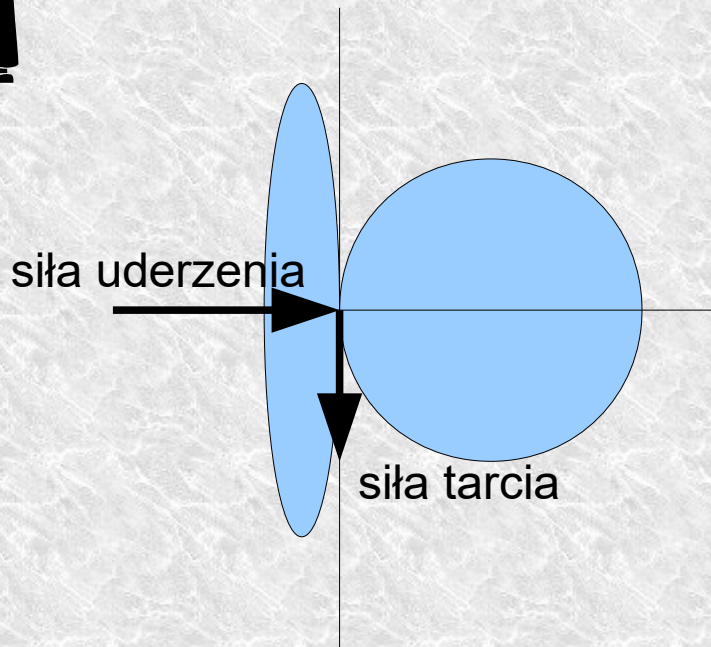
Prędkość styczna pozostaje bez zmian:

$$v_{1s+} = v_{1s-}$$

$$v_{2s+} = 0$$



# Tarcie



$$\mathbf{v}_{1+} = \mathbf{v}_{1-} + [J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]/m_1$$

$$\mathbf{v}_{2+} = \mathbf{v}_{2-} + [-J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]/m_2$$

$$\boldsymbol{\omega}_{1+} = \boldsymbol{\omega}_{1-} + \{\mathbf{r}_1 \times [J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]\}/I_1$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2+} = \boldsymbol{\omega}_{2-} + \{\mathbf{r}_2 \times [-J\mathbf{n} + (\mu J)\mathbf{t}]\}/I_2$$

$\mathbf{t}$  - jednostkowy wektor styczny

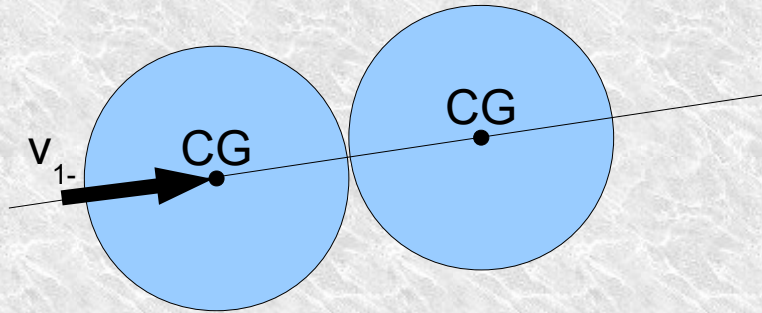
$\mathbf{n}$  - normalny wektor jednostkowy

$\mu$  - współczynnik tarcia

$J$  - popęd



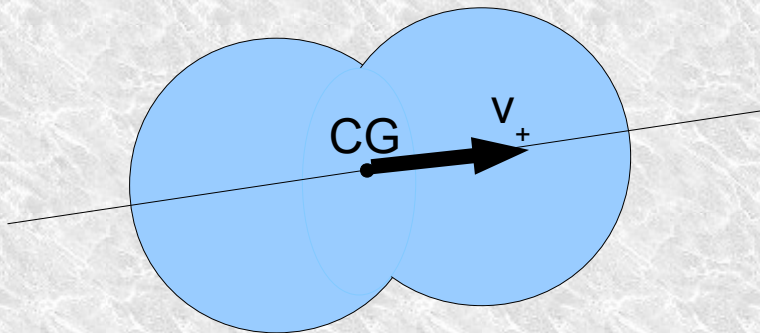
## Zderzenie na wprost idealnie niesprężyste



$$m_1 = m_2 = 156\text{g}$$

$$v_{1-} = 5\text{m/s}, \quad v_{2-} = 0$$

$$m_1 v_{1-} + m_2 v_{2-} = (m_1 + m_2) v_+$$
$$v_+ = (m_1 v_{1-} + m_2 v_{2-}) / (m_1 + m_2)$$
$$v_+ = (m v_{1-} + m_2 \theta) / (2m)$$



$$m = m_1 + m_2 = 2 \cdot 156\text{g}$$

$$v_+ = 2,5\text{m/s}$$

## **Zderzenie niesprężyste:**

- utrata energii kinetycznej – zamiana na energię odkształceń.

## **Współczynnik restytucji:**

$$e = - (v_{1+} - v_{2+}) / (v_{1-} - v_{2-})$$

dla zderzeń doskonale niesprężystych = 0,  
doskonale sprężystych = 1.

**Detekcja zderzenia** – komputerowy problem geometryczny, którego rozwiązanie prowadzi do ustalenia, czy i gdzie nastąpi zderzenie.

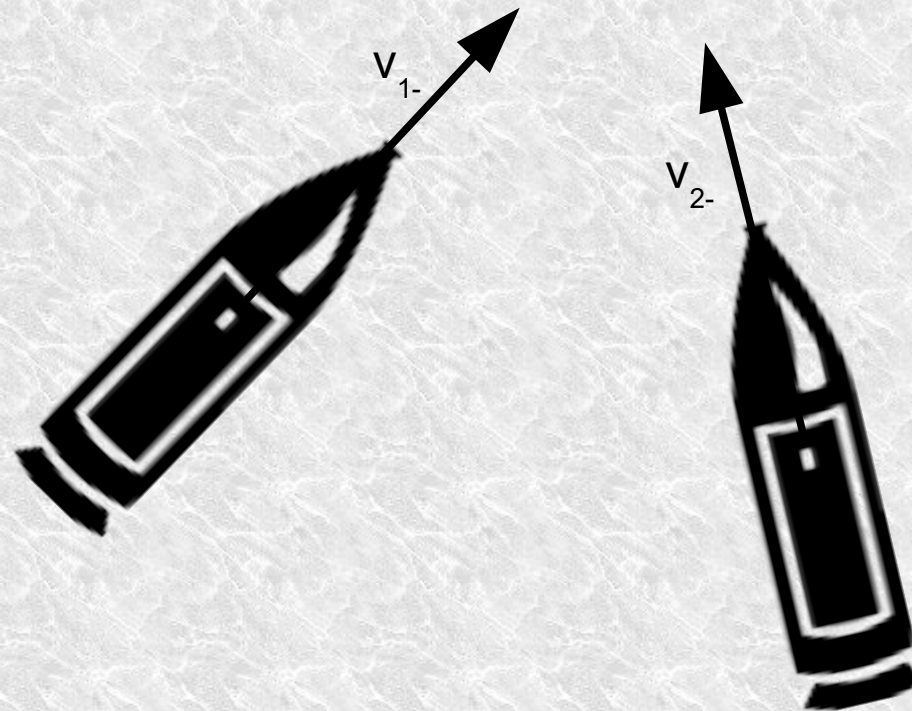
**Odpowiedź zderzenia** – problem fizyczny ruchu ciał po zderzeniu.

## Detekcja zderzenia:

przecięcie wektorów prędkości,

odległość do punktu zderzenia,

punkty, które się zderzają.

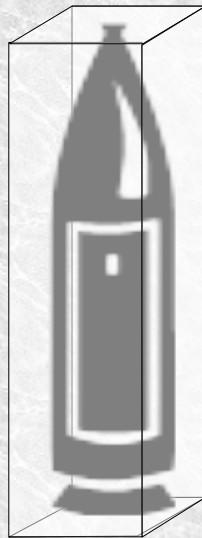
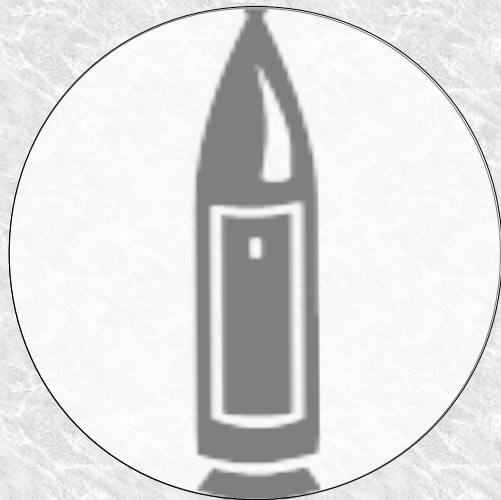


## Detekcja zderzenia:

kule otaczające,

prostopadłościany otaczające,

otoczki wypukłe.



## Detekcja zderzenia:

ściana-wierzchołek

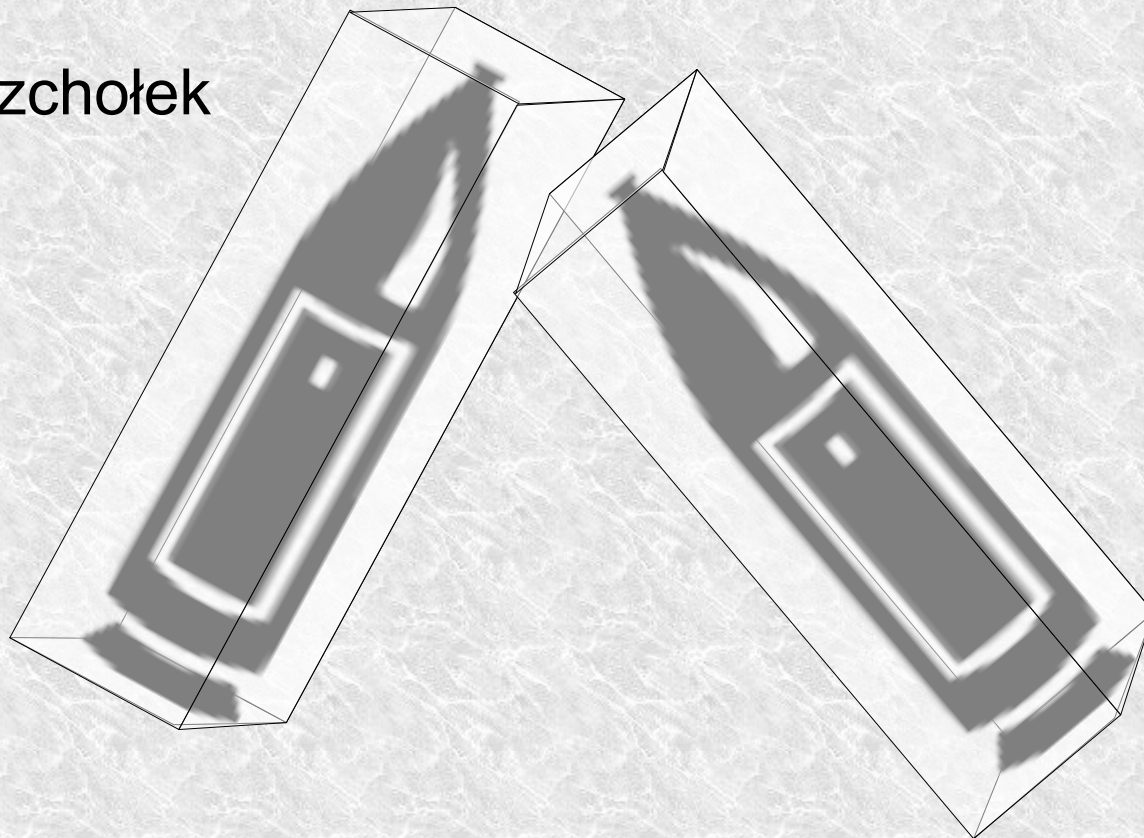
ściana-krawędź

ściana-ściana

krawędź-wierzchołek

krawędź-krawędź

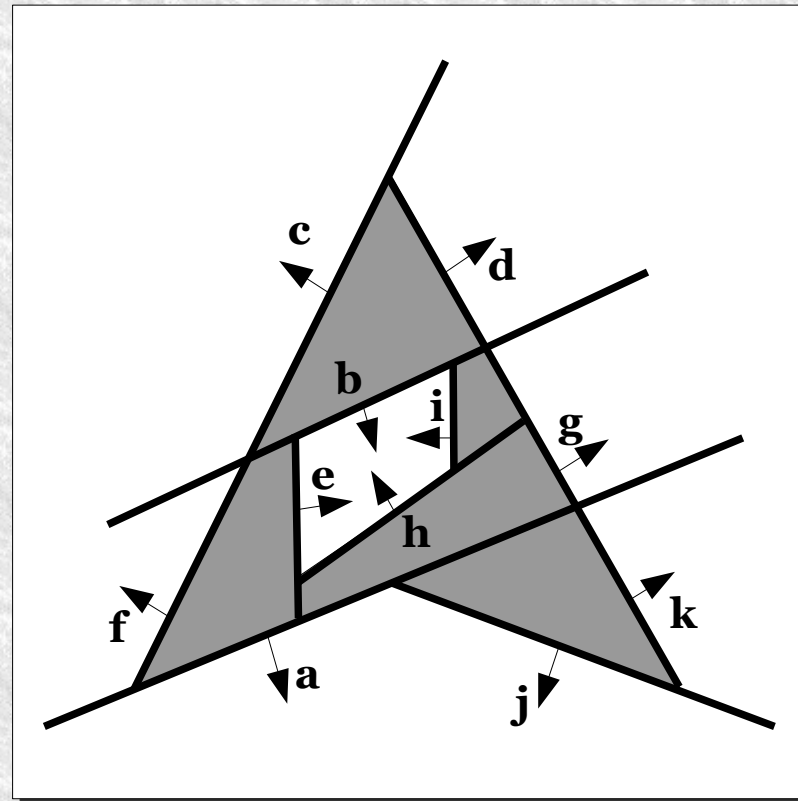
wierzchołek-wierzchołek



# Drzewa binarnego podziału przestrzeni (Binary Space Partitioning Trees $\rightarrow$ BSP)

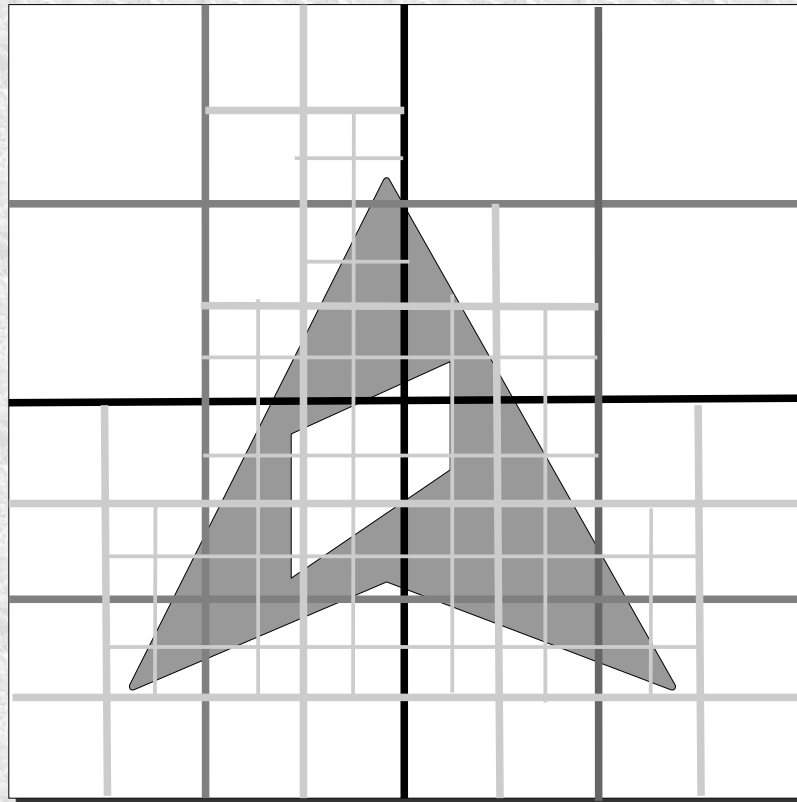
podział przestrzeni na pary podprzestrzeni, przy czym każda para jest dzielona płaszczyzną o dowolnej orientacji i położeniu.

Liście drzewa reprezentują obszary leżące całkowicie wewnątrz wielościanu (*in*) lub całkowicie na zewnątrz (*out*).



## Drzewa ósemkowe

podział przestrzeni na oktanty - osiem identycznych sześciątów.  
Każdy oktant może być pusty, pełny lub częściowo wypełniony.  
W przypadku oktantów częściowo wypełnionych podziału dokonuje się rekurencyjnie aż do osiągnięcia podziału jednorodnego (pełne i puste) lub do osiągnięcia założonej głębokości podziału.





## KD drzewa

podział przestrzeni na prostokąty, aż do osiągnięcia podziału jednorodnego (pełne i puste) lub do osiągnięcia założonej głębokości podziału.

